Exercice 1 (5 points)

Un QCM (questionnaire à choix multiples) est composé de 5 questions numérotées de 1 à 5.
Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte.

PARTIE A
Un candidat répond à ce QCM, au hasard, et de façon indépendante,à chacune des 5 questions.
On décide de donner au candidat 1 point par réponse exacte.
Soit X la variable aléatoire associant aux réponses du candidat la note obtenue sur 5.

1) Quelle est la loi de X. Préciser ses paramètres.

2) Quelle est la probabilité que le candidat obtienne la note maximale ?

3) Donner la loi de probabilité de X
(on fera un tableau et on expliquera les calculs)
les résultats seront arrondis au millième

4) Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne au moins deux réponses exactes ?

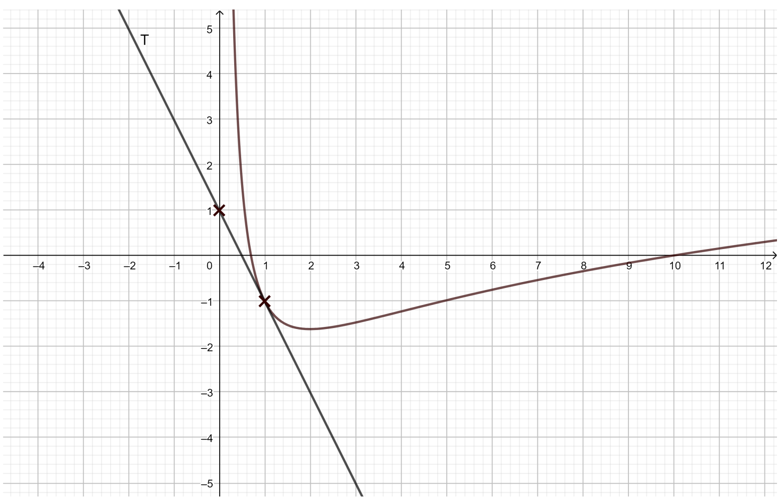
5) Quelle note obtient en moyenne un candidat qui répond au hasard ?

PARTIE B
Pour pénaliser les candidats qui ne comptent que sur le hasard, on décide de donner 1 point par réponse exacte, mais cette fois d'enlever 0.2 point par réponse inexacte.
Soit Y la nouvelle variable aléatoire associant aux réponses du candidat la note obtenue sur 5.
Les candidats répondent à toutes les questions.

6) En déduire la probabilité qu'un candidat répondant au hasard obtienne une note négative.

Exercice 2 (4 points)

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$
$\mathscr{C}$ est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.
T est la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $(1;-1)$.
T passe par le point de coordonnées $(0;1)$.



1) Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

2) On sait que $f(x) = 2\ln(x) + \dfrac{a}{x} + b$ où a et b sont des nombres réels.

a) Calculer $f'(x)$

b) Justifier alors que $a = 4$ et $b = -5$

3) Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensembl de définition et préciser les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

4) Etudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.

5) En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 3 (3 points)

1) Montrer que pour tout x, on a :

$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (x-3)(2x^2 + 3x - 2)$

2) Déterminer les conditions d'existence, puis résoudre l'équation

$2\ln(x) + \ln(2x-3) = \ln(11x-6)$

Exercice 4 (8 points)

Partie A : Étude du signe d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 4\ln x$$

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0.
2. Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]0;+\infty[$; déterminer une valeur approchée à 10^{-2} de α.
4. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Étude de la fonction

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormal, de la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$g(x) = 2\ln x$$

L'objectif est de démontrer que, parmi les points de la courbe $\mathcal{C}$, il y en a un et un seul plus proche de l'origine O que les autres.

1. Soit M un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x : exprimer OM en fonction de x.
   (on rappelle que $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$)
2. Soit h la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2$.
   a) Montrer que $h'(x) = \dfrac{2f(x)}{x}$; en déduire les variations de la fonction h.
   b) En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe $\mathcal{C}$, tel que pour tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A, on ait $OM > OA$. Donner les coordonnées du point A.

   Bonus :
3. Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.

Exercice 5 (bonus)

Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ \ln(x) + \ln(y) = 3\ln(5) \end{cases}$$