Exercice 1

A 1) X suit une loi binomiale

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(5\,;\,0{,}25)$ 0,5

2) $P(X=5) = (0{,}25)^5 \approx 0{,}001$

3) $\forall k \in [\![0\,;\,5]\!]$ $P(X=k) = \binom{5}{k}\, 0{,}25^k\, 0{,}75^{5-k}$. On arrondit au millième

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	$\approx 0{,}237$	$\approx 0{,}396$	$\approx 0{,}264$	$\approx 0{,}088$	$\approx 0{,}015$	$\approx 0{,}001$

3

4) $P(X \geqslant 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

$P(X \geqslant 2) \approx 0{,}367$ 0,5

5) Calcul de l'espérance

$E(X) = 5 \times 0{,}25 = 1{,}25$ 0,5

Un candidat qui répond au hasard obtient en moyenne 1,25

B 6)

y_i	-1	0,2	1,4	2,6	3,8	5
p_i	0,237	0,396	0,264	0,088	0,015	0,001

$$Y = \underset{\substack{\text{nombre}\\ \text{de}\\ \text{réponses}\\ \text{exactes}}}{X} - 0{,}2\,(\underbrace{5-X}_{\substack{\text{nombre}\\ \text{de}\\ \text{réponses fausses}}}) \iff Y = 1{,}2\,X - 1$$

1

$P(Y<0) = P(Y=-1) \approx 0{,}237$

Exercice 2

1) $f(1) = -1$ $\quad f'(1) = -2$ $\quad$ 1

2) a) $f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{a}{x^2} = \dfrac{2x - a}{x^2}$

b) $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f'(1) = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = -1 \\ 2 - a = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4 \\ b = -5 \end{cases}$ $\quad$ 1

3) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (2\ln x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{4}{x} - 5\right) = -5 \end{array}\right\}$ Par somme de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\quad$ 0,5

Pour la limite en 0, on factorise $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(2x\ln x + 4 - 5x\right)$$

<u>D'après le cours</u> : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0} (2x\ln x + 4 - 5x) = 4 \end{array}\right\}$ Par produit de limites $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ $\quad$ 0,5

asymptote verticale d'équation $x = 0$

4) $f'(x) = \dfrac{2(x-2)}{x^2}$ $\quad$ Le signe de $f'(x)$ est le signe de $(x-2)$

$x - 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	$f(2)$	↗	$+\infty$

1

$f(2) = 2\ln(2) - 3 < 0$

5) $\boxed{\text{Sur l'intervalle }]0\,;\,2]}$

- La fonction f est continue et strictement décroissante
- $0 \in [2\ln 2 - 3\,;\,+\infty[$

D'après les valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,2]$

1

$\boxed{\text{Sur l'intervalle }]2\,;\,+\infty[}$

- La fonction f est continue et strictement croissante
- $0 \in]2\ln 2 - 3\,;\,+\infty[$
- L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions sur $]0\,;+\infty[$

Exercice 3

1) $(x-3)(2x^2+3x-2) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 6x^2 - 9x + 6$

$(x-3)(2x^2+3x-2) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ 0,5

2) $\begin{cases} x > 0 \\ 2x - 3 > 0 \\ 11x - 6 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x > 1{,}5 \\ x > \dfrac{6}{11} \end{cases} \iff x > 1{,}5$ 1

$$2\ln(x) + \ln(2x-3) = \ln(11x-6)$$

$$\iff \ln\left(x^2(2x-3)\right) = \ln(11x-6)$$

$$\iff 2x^3 - 3x^2 = 11x - 6$$

$$\iff 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$$ 1,5

$$\iff (x-3)(2x^2+3x-2) = 0$$

$x = 3$ ou $x = -2$ ou $x = \frac{1}{2}$ $\longrightarrow$ on refuse ces solutions car $-2 < 1{,}5$ et $\frac{1}{2} < 1{,}5$

$3 > 1{,}5$

$$S = \{3\}$$

Exercice 4

PARTIE A

1) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} 4\ln x = +\infty$ $\Big\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ 0,5

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$; $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ $\Big\}$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ 0,5

2) $f'(x) = 2x + \dfrac{4}{x}$ 0,5

$f'(x) = \dfrac{2x^2+4}{x}$

$\forall x \in]0;+\infty[$ $x > 0$ $2x^2+4>0$ donc $f'(x)>0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

0,5

3) Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $0 \in]-\infty;+\infty[$, donc d'après le corollaire des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ a une unique solution α dans l'intervalle $]0;+\infty[$. 1

Par balayages succesifs, on obtient :

$0{,}8 < \alpha < 0{,}9$

$0{,}83 < \alpha < 0{,}84$ 1 valeur approchée à 10^{-2}

$0{,}838 < \alpha < 0{,}839$ donc $\alpha \approx 0{,}84$

4)

x	0		α	
$f(x)$	||	$-$	0	$+$

0,5

PARTIE B

1) $O(0;0)$ $\quad M(x;2\ln x)$

$OM^2 = x^2+(2\ln x)^2$ d'où $OM = \sqrt{x^2+4(\ln x)^2}$ 1

2) a) $h'(x) = 2x + 4 \times 2(\ln x) \times \frac{1}{x}$

$h'(x) = 2x + \frac{8\ln x}{x}$

$h'(x) = \frac{2x^2+8\ln x}{x}$

$h'(x) = \frac{2f(x)}{x}$ 1

$\forall x \in]0;+\infty[$ $\quad x>0$ et $2>0$ donc $h'(x)$ a le même signe que $f(x)$

x	0		α		$+\infty$
$h'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
h	$\|\|$	$+\infty \searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow +\infty$	

$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$

0,5

b) La fonction h admet un minimum en α donc la fonction $x \to OM(x)$ admet aussi un minimum en α (car la fonction $x \to \sqrt{x}$ est strictement croissante)

$A(\alpha; 2\ln\alpha)$ 1

<u>bonus</u>: Equation tangente $\quad T_A : y = \frac{2}{\alpha}x + 2\ln\alpha - 2$

+1

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 2/\alpha\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de T_A

$f(\alpha)=0$

$\Leftrightarrow \alpha^2+4\ln\alpha = 0$

$\Leftrightarrow 4\ln\alpha = -\alpha^2$

$\vec{OA}\cdot\vec{u} = (\alpha)(1) + (2\ln\alpha)\left(\frac{2}{\alpha}\right)$

$= \alpha - \frac{\alpha^2}{\alpha}$

$= 0$

donc $\vec{OA} \perp \vec{u}$

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ \ln x + \ln y = 3 \ln 5 \end{cases}$$

Conditions
$x > 0$
$y > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ \ln(xy) = \ln(5^3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 30 \\ xy = 125 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ -x^2 + 30x - 125 = 0 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 30 - x \\ x = 5 \text{ ou } x = 25 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 25 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = 25 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$S = \{(5, 25) ; (25, 5)\}$$

bonus