Exercice 1

1) $D_{f'} = \mathbb{R}$

$$f'(x) = (4x-5)e^{2x^2-5x+1}$$

2) $D_{g'} = \mathbb{R}^*$

du type $\frac{u}{v}$

$u(x) = e^x - x \qquad u'(x) = e^x - 1$

$v(x) = x^2 \qquad v'(x) = 2x$

$$g'(x) = \frac{x^2(e^x-1)-(e^x-x)2x}{(x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{xe^x - x - 2e^x + 2x}{x^3}$$

$$g'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + x}{x^3}$$

Exercice 2

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x^2 - 1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} \frac{9}{x^2-1} = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} x^2 - 1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} \frac{9}{x^2-1} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2+7}{2x^3+x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2}{2x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{2x} = 0$$

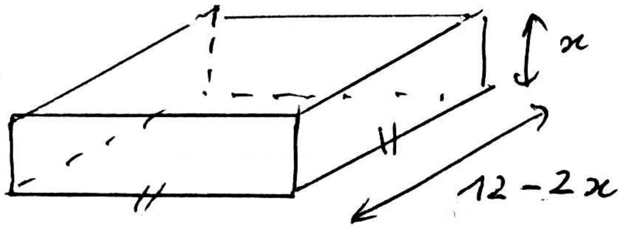
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}(3+e^{-x})}{e^{2x}(5-e^{-2x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3+e^{-x}}{5-e^{-2x}} = \frac{3}{5}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ (croissances comparées)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

par somme de limites $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

Exercice 3



1) $V(x) = \text{Aire de la base}(x) \times \text{hauteur}(x)$

$V(x) = (12-2x)^2 \times x$

$V(x) = (144 - 48x + 4x^2)\,x$

$V(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x$

2) $x \in]0;6[$ $\qquad D_V =]0;6[$

3) $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$

$\Delta = 9216 - 4(12)(144)$

$\Delta = 2304 = (48)^2$

$x_1 = \frac{96-48}{24}$ $\qquad x_2 = \frac{96+48}{24}$

$x_1 = 2$ $\qquad x_2 = 6$

x	0		2		6
$V'(x)$	‖	+	0	−	0 ‖
V	‖ 0	↗	128	↘	0 ‖

$\lim_{x \to 0} V(x) = 0$

$\lim_{x \to 6} V(x) = 0$

4) Le volume maximal est de 128 cm^3, il est atteint quand $x = 2$ cm.

<u>Exercice 4</u>

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+4) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

$\Big\}$ Par produit de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+4)e^{-x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 \cdot \dfrac{x}{e^{x}} = 0$ (croissances comparées)

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{e^{x}} = 0$

$\Big\}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

On a donc une asymptote horizontale d'équation $y=0$

2) f est du type $U \times V$ avec $U(x) = 2x+4$ $\quad U'(x) = 2$

$V(x) = e^{-x}$ $\quad V'(x) = -e^{-x}$

$f'(x) = 2e^{-x} - (2x+4)e^{-x}$

$f'(x) = (-2x-2)e^{-x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $(-2x-2)$

$-2x-2 \geqslant 0 \iff -2 \geqslant 2x \iff x \leqslant -1$

3)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$2e$	$\searrow$	0

$f(-1) = 2e \approx 5{,}43$

$2e > 1$

4) Sur l'intervalle $]-\infty ; -1]$ la fonction f est continue et strictement croissante. De plus $1 \in]-\infty ; 2e]$

Donc d'après le corollaire des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $]-\infty ; -1]$

De même, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution β dans l'intervalle $]-1;+\infty[$ car $1 \in]0;2e[$.

5) Dans la calculatrice, on rentre

$Y_1(x) = (2x+4)e^{-x} - 1$

Par balayages successifs, on trouve

$-2 < \alpha < -1$ $\qquad$ $2 < \beta < 3$

$-2 < \alpha < -1{,}9$ $\qquad$ $2{,}1 < \beta < 2{,}2$

$-1{,}93 < \alpha < -1{,}92$ $\qquad$ $2{,}10 < \beta < 2{,}11$

Exercice 5

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (-2x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x) = +\infty$

2) Etude en 2^-

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} (x-2) = 0^- \\ \lim\limits_{x \to 2^-} (-2x^2+7x-8) = -2 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$

Etude en 2^+

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (-2x^2+7x-8) = -2 \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

La courbe $\mathcal{C}$ admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 2$

3) f est du type $\dfrac{U}{V}$ avec $U(x) = -2x^2+7x-8$ $\quad V(x) = x-2$

$U'(x) = -4x+7 \quad V'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{-2x^2+8x-6}{(x-2)^2}$$

$\forall x \in D_f \quad (x-2)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que $(-2x^2+8x-6)$

Etudions le signe de $-2x^2+8x-6$

$\Delta = 16$, l'équation $-2x^2+8x-6=0$ a 2 solutions $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = 3$

$f(3) = -5$

4) a) Soit $\Delta(x) = f(x) - (-2x+3)$

$$\Delta(x) = \frac{-2}{(x-2)}$$

On a le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$+$
$\Delta(x)$	$+$	||	$-$

$\forall x \in]-\infty; 2[$, $\Delta(x) > 0$ donc $f(x) > (-2x+3)$ ie $\mathcal{C}$ au-dessus de Δ.

$\forall x \in]2; +\infty[$, $\Delta(x) < 0$ donc $f(x) < (-2x+3)$ ie $\mathcal{C}$ en-dessous de Δ.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x-2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - (-2x+3)\right] = 0$

Cela signifie que quand x augmente, $\mathcal{C}$ et Δ sont de plus en plus proches. Ces deux courbes sont donc asymptotes l'une de l'autre.

(Remarque : On a la même chose en $-\infty$)