Exercice 1 (3 points)

(u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3n^2-4}{n+2}$

1) Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation $u_n > 1000$

2) On code une fonction en Python.
Compléter les 4 dernières lignes afin de vérifier la réponse trouvée à la question 1).

```
def seuil():
    u=-2
    n=0
    while
        n=
        u=
     return
```

Exercice 2 (3 points)

Démontrer par récurrence :

$\forall n \geq 1$, n^3+2n est un multiple de 3.

Exercice 3 (4 points)

Dans chaque cas, déterminer la limite de la suite si elle existe :

$U_n = \dfrac{2n-3}{3n+1}$

$W_n = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{64} + ... + \left(\dfrac{-1}{4}\right)^n$

$V_n = \dfrac{3n^2-4}{n+1} - 3n$

$X_n = \dfrac{n\sqrt{n}+n}{2-n}$

Exercice 4 (4 points)

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n - 2$

Soit la suite (W_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n = u_n + 3$

1) Montrer que lq suite (W_n) est géométrique.

2) Exprimer W_n puis u_n en fonction de n.

On note $S_n = W_0 + W_1 + ... + W_n$ et $T_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

3) Calculer S_n et T_n en fonction de n.

4) En déduire les limites de (S_n) et (T_n).

Exercice 5 (6 points)

On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = \dfrac{9}{6 - V_n} \end{cases}$

PARTIE A

1. Ecrire, en Python, un script, qui affiche pour un entier n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

   b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.

   La suite (v_n) est-elle monotone ?

   c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par

$$w_n = \frac{1}{v_n - 3}.$$

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$
2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (v_n).