Exercice 1

1) $\frac{3n^2-4}{n+2} > 1000 \iff 3n^2-4 > 1000(n+2) \iff 3n^2-1000n-2004>0$

n		$n_1 \approx -1,99$		$n_2 \approx 335,33$	
$3n^2-1000n-2004$	$+$		$-$		$+$

$$\begin{cases} \frac{3n^2-4}{n+2} > 1000 \\ n\in\mathbb{N} \end{cases} \iff n \geq 336$$

Les solutions de l'inéquation sont les nombres entiers supérieurs ou égaux à 336.

2)

```
def seuil( ):
    U=-2
    n=0
    while U < 1000 :
        n=n+1
        U=(3*n**2 - 4)/(n+2)
    return n
```

Exercice 2

Initialisation : $n=1$

$1^3+2\times1 = 1+2=3$

$1^3+2\times1$ est un multiple de 3

Hérédité : Supposons qu'il existe un nombre entier $K\geq1$ tel que $K^3+2K=3\ell$ avec $\ell\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}(K+1)^3+2(K+1) &= K^3+3K^2+3K+1+2K+2 \\ &= \underbrace{K^3+2K}_{H.R.} + 3K^2+3K+3 \\ &= 3\ell + 3K^2+3K+3 \\ &= 3\left[\ell+K^2+K+1\right] \\ &= 3\ell' \text{ avec } \ell'\in\mathbb{N}^*\end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée

Exercice 3

I) $\lim U_n = \lim \dfrac{2n}{3n} = \dfrac{2}{3}$

II) A première vue, on a une forme indéterminée $+\infty - \infty$

$$V_n = \frac{3n^2 - 4 - 3n(n+1)}{n+1}$$

$$V_n = \frac{-3n-4}{n+1} \qquad \lim V_n = \lim \frac{-3n}{n} = -3$$

III) $$W_n = -\frac{1}{4}\left[1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdots + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$$

$$W_n = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$W_n = -\frac{1}{5}\left(1-\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$\lim \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car du type q^n avec $-1 < q < 1$

$\lim \left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] = 1$ donc $\lim W_n = -\frac{1}{5}$

IV) $$X_n = \frac{\cancel{n}(\sqrt{n}+1)}{\cancel{n}\left(\frac{2}{n}-1\right)}$$

$\left.\begin{array}{l} \lim (\sqrt{n}+1) = +\infty \\ \lim \left(\frac{2}{n}-1\right) = -1 \end{array}\right\}$ Par quotient de limites, on obtient $\lim X_n = -\infty$

Exercice 4

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n - 2 \end{cases}$$

1) $W_{n+1} = u_{n+1} + 3$

$W_{n+1} = \frac{1}{3} u_n - 2 + 3$

$W_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 3)$ 1,5

$W_{n+1} = \frac{1}{3} W_n$

La suite (W_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $W_0 = u_0 + 3 = 6$

2) D'après ce qui précède, on a : $\boxed{W_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}$ (A) 0,5

$W_n = u_n + 3$ (B)

En utilisant (A) et (B), on obtient

$$6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = u_n + 3$$

$$\boxed{u_n = -3 + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$ 0,5

3) $S_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$

$S_n = 6 + 6 \cdot \frac{1}{3} + \dots + 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$S_n = 6\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

$S_n = 6 \times \dfrac{1 - (1/3)^{n+1}}{1 - 1/3}$ 1

$T_n = -3(n+1) + S_n$

$T_n = -3(n+1) + 6 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}$

$T_n = -3n - 3 + 9\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$

1

4) $\lim \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 0$

donc $\lim S_n = 6 \times \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 9$ 0,5

$\left.\begin{array}{l} \lim S_n = 9 \\ \lim -3(n+1) = -\infty \end{array}\right\}$ Par somme de limites

donc $\lim T_n = -\infty$ 0,5

Exercice 5

PARTIE A

1)

```
def fonct(n):
    V=1
    print(0,V)
    for i in range(1,n+1):
        V= 9/(6-V)
        print(i,V)
    return ('fin')
```

2) La suite est croissante et converge vers 3.

3) a) Initialisation

$V_0 = 1$ donc $0 < V_0 < 3$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier naturel K : $0 < V_K < 3$

par suite $-3 < -V_K < 0$

$6-3 < 6-V_K < 6$

$\frac{1}{3} > \frac{1}{6-V_K} > \frac{1}{6}$ (car la fonction $x \to \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$)

$\frac{9}{3} > \frac{9}{6-V_K} > \frac{9}{6}$

d'où $0 < V_{K+1} < 3$

On a démontré l'hérédité

identité remarquable

b) $V_{n+1} - V_n = \frac{9}{6-V_n} - V_n = \frac{9 - V_n(6-V_n)}{6-V_n} = \frac{+V_n^2 - 6V_n + 9}{6-V_n}$

$V_{n+1} - V_n = \frac{(3-V_n)^2}{6-V_n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $(3-V_n)^2 > 0$

D'après la question 3a on a : $0 < V_n < 3$ donc $V_n < 6$ donc $6-V_n > 0$

Finalement pour tout n de $\mathbb{N}$ $V_{n+1} - V_n > 0$ et (V_n) est strictement croissante.

c) (V_n) est une suite croissante (strictement) et majorée (par 3) donc elle converge.

PARTIE B

1) $W_{n+1} - W_n = \dfrac{1}{V_{n+1} - 3} - \dfrac{1}{V_n - 3}$

$= \dfrac{1}{\frac{9}{6-V_n} - 3} - \dfrac{1}{V_n - 3}$

$= \dfrac{6 - V_n}{3V_n - 9} - \dfrac{1}{V_n - 3}$

$= \dfrac{6 - V_n - 3}{3V_n - 9}$

$= - \dfrac{V_n - 3}{3(V_n - 3)}$

$= -\dfrac{1}{3}$

La suite (W_n) est donc arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et de premier terme $W_0 = -\frac{1}{2}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\begin{cases} W_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}n & \text{(A) expression de } W_n \text{ en fonction de } n \\ W_n = \dfrac{1}{V_n - 3} & \text{(B)} \end{cases}$

(A) et (B) nous donne $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}n = \dfrac{1}{V_n - 3}$

$\dfrac{-3-2n}{6} = \dfrac{1}{V_n - 3}$

$(V_n - 3)(-3-2n) = 6$

$V_n(-3-2n) = 6 + 3(-3-2n)$

$V_n = \dfrac{6}{-3-2n} + 3$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{6}{-3-2n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 3$