

Exercice 1

$$1) \quad T_{n+1} - T_n = -0,06(T_n - 25) \Leftrightarrow T_{n+1} = 1T_n - 0,06T_n + 1,5$$
$$\Leftrightarrow T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$$

$$2) \quad T_1 \approx -16,4 \quad T_2 \approx -13,9$$

3) Initialisation

$$\left. \begin{array}{l} T_0 = -19 \\ -19 \leq 25 \end{array} \right\} \text{ donc } T_0 \leq 25$$

C'est vrai si $n=0$

Hérédité: Supposons qu'il existe un nombre entier naturel k tel que $T_k \leq 25$.

$$\text{On a alors } 0,94 T_k \leq 0,94 \times 25$$

$$0,94 T_k + 1,5 \leq 23,5 + 1,5$$

$$T_{k+1} \leq 25$$

On veut de montrer l'hérédité

Conclusion: Grâce à l'hérédité et l'initialisation on a montré:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n \leq 25$$

C'était prévisible d'avoir des gâteaux dont la température ne dépasse pas la température extérieure de 25° .

$$4) \quad T_{n+1} - T_n = (0,94T_n + 1,5) - T_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow T_{n+1} - T_n = -0,06T_n + 1,5$$

$$T_n \leq 25 \text{ nous donne } -0,06 T_n \geq -1,5$$

$$\text{et finalement } -0,06 T_n + 1,5 \geq 0 \text{ i.e. } T_{n+1} - T_n \geq 0$$

La suite (T_n) est donc croissante

5) La suite (T_n) est croissante et majorée par 25
donc elle est convergente (\neq sa limite n'est pas forcément 25)

6) a) $U_{n+1} = T_{n+1} - 25$

$$U_{n+1} = 0,94 T_n + 1,5 - 25$$

$$U_{n+1} = 0,94 (U_n + 25) + 1,5 - 25$$

$$U_{n+1} = 0,94 U_n + 23,5 - 23,5$$

$$U_{n+1} = 0,94 U_n$$

(U_n) est une suite géométrique de raison 0,94 et de premier terme

$$U_0 = -44$$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n = -44 \times 0,94^n$

$$\left. \begin{array}{l} b) \quad U_n = T_n - 25 \\ U_n = -44 \times 0,94^n \end{array} \right\} \quad T_n = 25 - 44 \times 0,94^n$$

c) $\lim (0,94)^n = 0$ car du type q^n avec $0 < q < 1$

Par suite $\lim -44 \times 0,94^n = 0$ donc $\lim T_n = 25$

A long terme, la température des gateaux rejoindra la température extérieure.

7 a) $T(30) = 25 - 44 \times 0,94^{30}$

$$T(30) \approx 18^\circ$$

Au bout de 30 min la température est d'environ 18° .

b) $17 < T < 18$

La température atteint 10° entre 17 et 18 minutes

```

7c) def seuil():
    n = 0
    T = -19
    while T < 0:
        T = 0,94 * T + 1,5
        n = n + 1
    return(n)

```

Exercice 2

1) $u_1 = 2$ $u_2 = 3$ $u_3 = 4$ $u_4 = 5$

2) Il semblerait que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on ait : $u_m = m + 1$

3) Soit la proposition $\mathcal{P}(m) : u_m = m + 1$

Initialisation

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = 1 \\ 0 + 1 = 1 \end{array} \right\} u_0 = 0 + 1$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie

$$u_{k+1} = 10u_k - 9k - 8$$

$$u_{k+1} = 10(k+1) - 9k - 8$$

$$u_{k+1} = 10k + 10 - 9k - 8$$

$$u_{k+1} = k + 2$$

l'hérédité est montrée

Conclusion : Avec l'initialisation et l'hérédité, on a montré

que pour tout entier naturel n on a : $\boxed{u_n = n + 1}$

Exercice 3

$$1) \lim A_n = \lim \frac{5n^2}{3n^2} = \left(\frac{5}{3}\right)$$

$$2) B_n = 5^n \left(\frac{-6^n}{5^n} + 1 \right) \Leftrightarrow B_n = 5^n \left[-\left(\frac{6}{5}\right)^n + 1 \right]$$

$$\lim 5^n = +\infty$$

$$\lim \left(-\left(\frac{6}{5}\right)^n + 1 \right) = -\infty$$

Par produit de limites

$$\lim B_n = (-\infty)$$

$$3) C_n = \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}{n^3 \left(\sqrt{n} + \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = 1$$

$$\lim \left(\sqrt{n} + \frac{1}{n^2} \right) = +\infty$$

Par quotient de limites

$$\lim C_n = (0^+)$$

$$4) -1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$-2 \leq 2(-1)^n \leq 2$$

$$n-2 \leq n+2(-1)^n \leq n+2$$

$$\lim(n-2) = +\infty$$

$$n-2 \leq n+2(-1)^n$$

Par comparaison
on obtient

$$\lim D_n = (+\infty)$$

$$5) \lim_{q>1} (1,01)^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-1<q<1} (0,99)^n = 0 \quad \left. \vphantom{\lim_{q>1}} \right) \text{ du type } q^n$$

$$\lim [1 + (1,01)^n] = +\infty$$

$$\lim [1 + (-0,99)^n] = 1$$

Par quotient de limites

$$\lim W_n = (+\infty)$$

$$6) \lim t_n = \lim \frac{3n}{n} = 3^{\ominus} \rightarrow \frac{3n+1}{n+5} = \frac{3(n+5)}{(n+5)} - \frac{14}{n+5}$$

$$\frac{3n+1}{n+5} = 3 - \frac{14}{n+5}$$

$$\text{donc } \frac{3n+1}{n+5} < 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim 3+t_n = 6 \\ \lim t_n - 3 = 0^- \end{array} \right\} \text{ Par quotient de limites, on obtient } \lim X_n = \textcircled{-\infty}$$

$$7) 1 + 0,6 + 0,6^2 + \dots + 0,6^m = \frac{1 - 0,6^{m+1}}{1 - 0,6}$$

$$0,6 + 0,6^2 + \dots + 0,6^m = \frac{1 - 0,6^{m+1}}{1 - 0,6} - 1$$

$$\lim Y_n = \lim \left(\frac{1 - 0,6^{m+1}}{0,4} - 1 \right) = \frac{1}{0,4} - 1 = \textcircled{1,5}$$

$$8) Z_n = 1 + \frac{4}{3} + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{3}\right)^m = \frac{1 - \left(\frac{4}{3}\right)^{m+1}}{1 - \frac{4}{3}}$$

$$\lim \left(\frac{4}{3}\right)^m = +\infty \text{ donc } \lim \left[1 - \left(\frac{4}{3}\right)^m\right] = -\infty$$

$$\text{Puisque } \left(1 - \frac{4}{3}\right) < 0 \text{ on a par suite } \lim Z_n = \textcircled{+\infty}$$

EXERCICE 4

5 points

L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

1. Voici le tableau complété (on peut calculer rapidement les termes à la main, puis vérifier à la calculatrice) :

| | | | | | | |
|-------|---|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| u_n | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{5}{32}$ |

2. Par exploration à la calculatrice, les termes de la suite semblent décroître, tout en restant strictement positifs, on a $u_{100} \approx 8 \times 10^{-29}$, et $u_{1000} \approx 9 \times 10^{-299}$.

On suppose que la suite converge vers 0.

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

1. On a : $w_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{2}$.

2. On va établir la relation de récurrence de (w_n) . Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{(n+1)+1} - \frac{1}{2}u_{(n+1)} \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } (n+1) \\ &= u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} \\ &= \left(u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n\right) - \frac{1}{2}u_{n+1} \quad \text{en appliquant la relation de récurrence de } u. \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right) \\ &= \frac{1}{2}w_n \quad \text{en appliquant la définition de } w \text{ au rang } n \end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n$.

Cette relation de récurrence établit que (w_n) est une suite géométrique, de raison $q = \frac{1}{2}$, et de premier terme $w_0 = \frac{1}{2}$.

3. Puisque la suite est géométrique, on a la propriété classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

4. Soit n un entier naturel. On reprend la définition de (w_n) :

$$\begin{aligned} w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n &\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \quad \text{d'après l'expression explicite de } w_n \\ &\iff u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n \end{aligned}$$

On arrive bien à la relation de récurrence demandée.

5. Pour tout n entier naturel, on pose : P_n l'affirmation : « $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ».

Initialisation : On a d'une part $u_0 = 0$ et, d'autre part : $0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 0 \times 1 = 0$.

L'affirmation est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Pour un entier naturel n donné, on suppose que la propriété P_n est vraie, c'est-à-dire : $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

On a : $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$ d'après la relation de récurrence de la question **B. 4**

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2} \times n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{par hypothèse de récurrence}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1+n)$$

$$u_{n+1} = (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{c'est l'affirmation } P_{n+1}$$

Conclusion : L'affirmation P_0 est vraie, et, pour tout entier naturel n , la véracité de l'affirmation P_n est héréditaire, donc, par principe de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Partie C : Étude de la suite (u_n)

1. Soit n un entier naturel non nul, donc supérieur ou égal à 1 :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{d'après la question B. 5.}$$

$$= (n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times 2$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times ((n+1) - 2n)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times (1-n)$$

La différence $u_{n+1} - u_n$ est égale au produit de deux nombres de signe contraire, car, pour n entier naturel supérieur ou égal à 1 :

- $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ est positif strictement;

- $(1 - n)$ est négatif ou nul

La différence $u_{n+1} - u_n$ est donc négative ou nulle pour tout n supérieur ou égal à 1, on en déduit donc que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.

2. L'expression du terme général de la suite (u_n) permet d'affirmer que la suite est minorée par 0, car chaque terme est le produit de n , entier naturel, donc positif et de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, strictement positif, car $\frac{1}{2}$ est strictement positif.

De plus, la suite est décroissante, à partir du rang $n = 1$.

La suite est donc décroissante (à partir du rang $n = 1$) et minorée par 0 : on en déduit qu'elle converge, vers une limite ℓ dont on sait que $\ell \geq 0$.

3. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.

$$\begin{aligned} \text{Résolvons cette équation : } \ell = \ell - \frac{1}{4}\ell &\iff \ell = \frac{3}{4}\ell \\ &\iff \ell - \frac{3}{4}\ell = 0 \\ &\iff \frac{1}{4}\ell = 0 \\ &\iff \ell = 0 \quad \text{car } \frac{1}{4} \neq 0 \end{aligned}$$

L'équation ayant une unique solution, puisque la limite doit être une solution de l'équation, on a donc la limite de la suite (u_n) qui est 0, l'unique solution de l'équation.

Cela vient confirmer notre conjecture de la **partie A**.