Fonctions trigonométriques

1 Rappels

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriétés : (par diverses symétries)

$\cos(-x) = \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(\pi - x) = -\cos x$
$\sin(\pi - x) = \sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\sin(\pi + x) = -\sin x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

Propriété : (formules d'addition)

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Propriétés : (formules de duplication)
$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$
$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

Résolution d'équations
$\cos a = \cos b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi$ ou $a = -b + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$\sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi$ ou $a = \pi - b + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

2 Fonction cosinus

2.1 Ensemble de définition

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$

2.2 Parité

La fonction cosinus est paire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$
Conséquence : La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe de ordonnées.

2.3 Périodicité

La fonction cosinus est périodique de période 2π.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $cos(x + 2\pi) = cos(x)$
Conséquence : La courbe est invariante par toute translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$,$\forall k \in \mathbb{Z}$

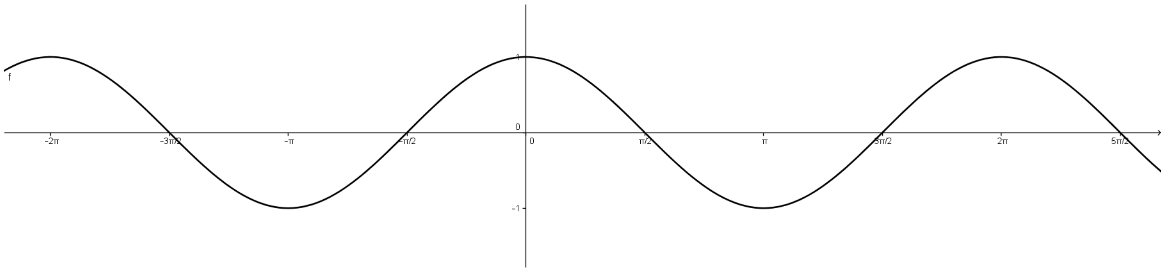
2.4 Dérivée

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\forall x \in \mathbb{R}, (cosx)' = -sinx$

2.5 Tableau de variation

x	$-\pi$		0		π
$-sin(x)$	0	$+$	0	$-$	0
cos	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

2.6 Représentation graphique



3 Fonction sinus

3.1 Ensemble de définition

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$

3.2 Parité

La fonction sinus est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin x$
Conséquence : La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3.3 Périodicité

La fonction sinus est périodique de période 2π.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $sin(x + 2\pi) = sinx$
Conséquence : La courbe est invariante par toute translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$, $(\forall k \in \mathbb{Z})$

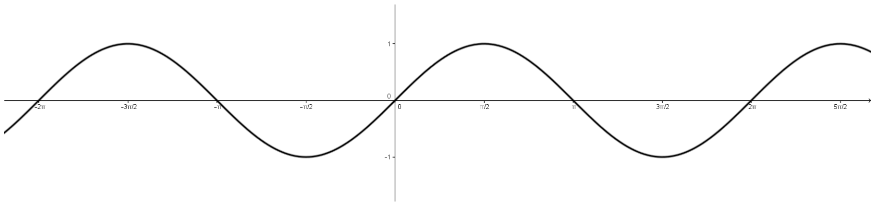
3.4 Dérivée

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$\forall x \in \mathbb{R}, (\sin x)' = \cos x$

3.5 Tableau de variation

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$cos(x)$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	1
sin	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

3.6 Représentation graphique



4 Fonction tangente

4.1 Ensemble de définition

La fonction tangente est périodique de période π.
La fonction tangente est définie sur $D = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

4.2 Parité

La fonction tangente est impaire : $\forall x \in D$, $\tan(-x) = \tan x$
Conséquence : La courbe est symétrique par rapport à l'origine.

4.3 Périodicité

$\forall x \in D$, $\tan(x + \pi) = \tan x$
Conséquence : La courbe est invariante par toute translation de vecteur $k\pi\vec{i}$, $(\forall k \in \mathbb{Z})$

4.4 Dérivée

La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition et on a :
$(\tan x)' = \frac{1}{cos^2 x} = 1 + tan^2 x$

4.5 Tableau de variation

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$
Les droites D_k : $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont des asymptotes verticales à la courbe

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{cos^2 x}$	$\|\|$		$+$		$\|\|$
tan	$\|\|$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$	$\|\|$

4.6 représentation graphique