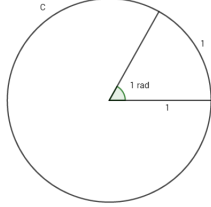


1 Radian et cercle trigonométrique

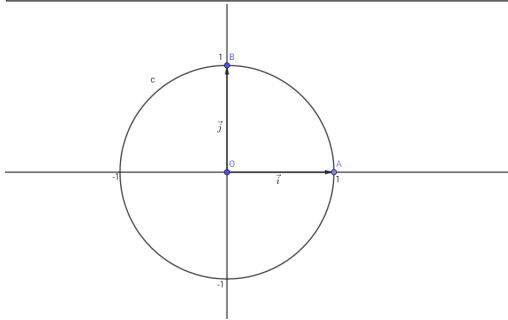
1.1 Le radian

Soit un cercle C de centre O et de rayon 1.
On appelle radian, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



1.2 Cercle trigonométrique

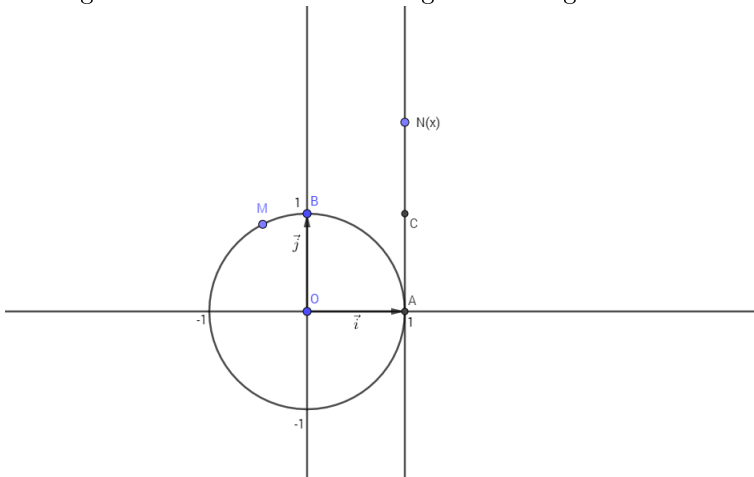
Définition : Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et orienté dans le sens direct (sens anti-horaire), le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.



1.3 Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $(A; \vec{j})$ soit un repère de la droite. Si on enroule la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc \widehat{AM} est ainsi égale à la longueur AN .



1.4 Correspondance radian degré

La circonférence d'un cercle de rayon R est $2\pi R$.

Le rayon du cercle trigonométrique est 1, donc sa longueur est 2π .

Comme la longueur d'un arc et l'angle qu'il intercepte sont proportionnels, un angle plein a pour mesure 2π .

Mesure en degrés	0	30	45	60	90	180	360
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

2 Mesure d'un angle orienté

2.1 cas des angles orientés de norme 1

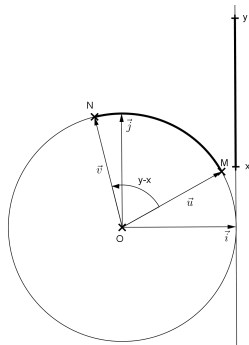
On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et orienté dans le sens direct.

On considère le cercle trigonométrique de centre O .

Au point d'abscisse x de la droite d'enroulement, on fait correspondre le point M du cercle.

Au point d'abscisse y de la droite, on fait correspondre le point N du cercle.

\vec{u} et \vec{v} sont les vecteurs de norme 1 tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$.



Définition : Une mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) est $y - x$.

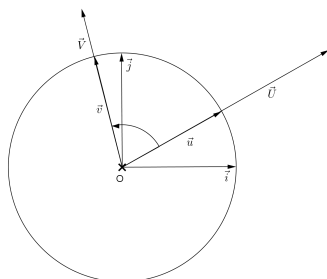
Propriété : Si on note α une mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) , tout mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) est de la forme $\alpha + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

2.2 cas des angles orientés quelconques

Soit \vec{U} et \vec{V} deux vecteurs non nuls.

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de norme 1 et respectivement colinéaires à \vec{U} et \vec{V} .

Définition : Une mesure de l'angle orienté $(\vec{U}; \vec{V})$ est égale à une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}; \vec{v})$.



2.3 Mesure principale d'un angle orienté

Définition : La mesure principale d'un angle orienté est celle qui appartient à l'intervalle $] -\pi; \pi]$.

3 Propriétés des angles orientés

3.1 angle nul, angle plat

Propriété : pour tout vecteur \vec{u} non nul, on a :

1) $(\vec{u}; \vec{u}) = 0$

2) $(\vec{u}; -\vec{u}) = \pi$

3.2 Relation de Chasles

Propriété : Pour tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} non nuls, on a :

$$(\vec{u}; \vec{v}) = (\vec{u}; \vec{w}) + (\vec{w}; \vec{v})$$

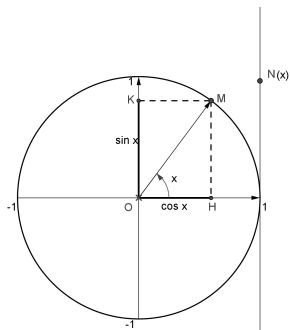
4 cosinus et sinus d'un angle

4.1 Définitions

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) et orienté dans le sens direct, on considère le cercle trigonométrique de centre O.

Pour tout nombre réel x , considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x . A ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.

On appelle H et K les projections du point M sur les axes.



Définition :

Le cosinus du nombre réel x est l'abscisse de M, noté $\cos x$

Le sinus du nombre réel x est l'ordonnée de M, noté $\sin x$.

4.2 Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

4.3 Propriétés

Propriété : Pour tout nombre réel x , on a :

(1) $-1 \leq \cos x \leq 1$

(2) $-1 \leq \sin x \leq 1$

(3) $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

(4) $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$

(5) $\sin(x) = \sin(x + 2k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$

4.4 Angles associés

Définition : Deux angles sont dits associés s'ils admettent des cosinus et des sinus égaux ou opposés.

Propriétés : Pour tout nombre réel x , on a :

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

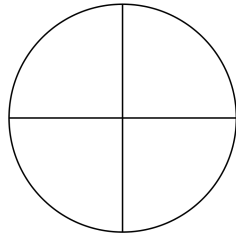
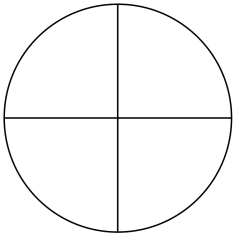
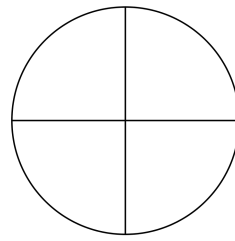
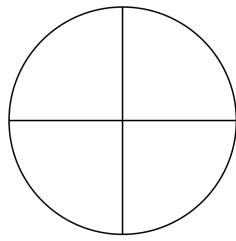
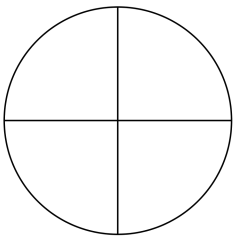
$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$$

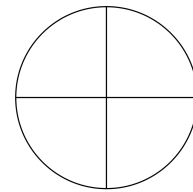
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$



5 Equations trigonométriques

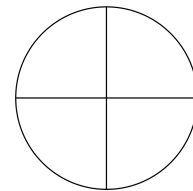
5.1 Résolution de l'équation $\cos(x) = \cos(a)$

Propriété : Soit a un nombre réel
 $\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$
(où k est un entier relatif)



5.2 Résolution de l'équation de $\sin(x) = \sin(a)$

Propriété : Soit a un nombre réel
 $\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = \pi - a + 2k\pi$
(où k est un entier relatif)



6 Formules trigonométriques

6.1 Formules d'addition

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a & \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \sin b \cos a \end{aligned}$$

6.2 Formules de duplication

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x & \sin(2x) &= 2 \sin x \cos x \\ \cos(2x) &= 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos(2x) &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

6.3 Formules de linéarisation

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

7 Fonction cosinus

7.1 Ensemble de définition et parité

La fonction cosinus est définie sur \mathbb{R}

La fonction cosinus est paire : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$

Conséquence : La courbe de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe de ordonnées.

7.2 Périodicité

La fonction cosinus est périodique de période 2π .

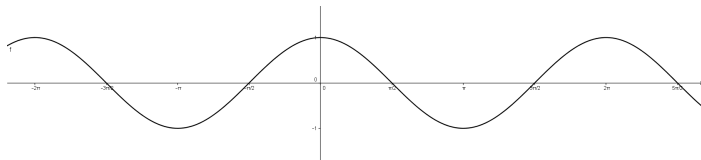
$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$

Conséquence : La courbe est invariante par toute translation de vecteur $2k\pi\vec{i}, \forall k \in \mathbb{Z}$

7.3 Tableau de variation

x	$-\pi$		0		π
$-\sin(x)$	0	+	0	-	0
\cos	-1	\nearrow	1	\searrow	-1

7.4 Représentation graphique



8 Fonction sinus

8.1 Ensemble de définition et parité

La fonction sinus est définie sur \mathbb{R}

La fonction sinus est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin x$

Conséquence : La courbe de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.

8.2 Périodicité

La fonction sinus est périodique de période 2π .

$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin x$

Conséquence : La courbe est invariante par toute translation de vecteur $2k\pi\vec{i}, (\forall k \in \mathbb{Z})$

8.3 Tableau de variation

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$	-1	-	0	+	0	-	1
\sin	0	\searrow	-1	\nearrow	1	\searrow	0

8.4 Représentation graphique

