1 Définition

1.1 Suite numérique

Définition :Une suite numérique u est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n

Remarques :
. Une suite numérique u est en fait une fonction qui à tout entier naturel n associe un réel $u(n)$ que l'on note u_n.
. On note une suite u ou (u_n) ou $(u_n)_{n\geq 0}$ (si elle est définie à partir de $n \geq 0$.

1.2 Suite définie de manière explicite

Définition : Définir une suite de manière explicite c'est donner une relation $u_n = f(n)$ où f est une fonction.

Exemple : $u_n = 2n + 5$ pour tout n de $\mathbb{N}$
On peut calculer directement le 98ème terme comme on le fait pour une fonction.
$u_{97} = 2 \times 97 + 5$
$u_{97} = 199$

1.3 Suite définie par récurrence

Définition : Lorsque l'on définit une suite par récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

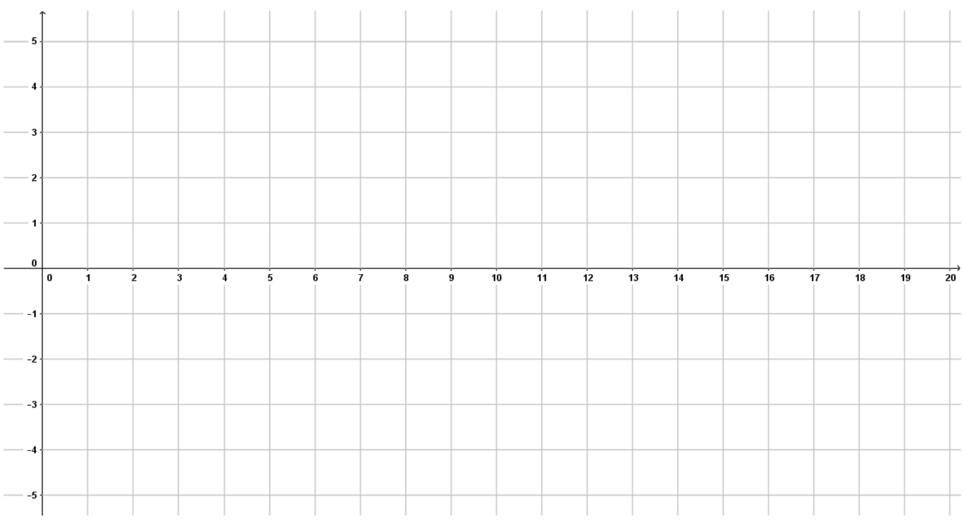
Exemple : La suite u_n est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3 \\ u_0 = 1 \end{cases}$
Pour calculer le 98eme terme de la suite u_{97}, il faut avoir calculé u_{96} et donc u_{95} etc...

Exemple célèbre : La suite de Fibonacci
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

2 Représentation graphique

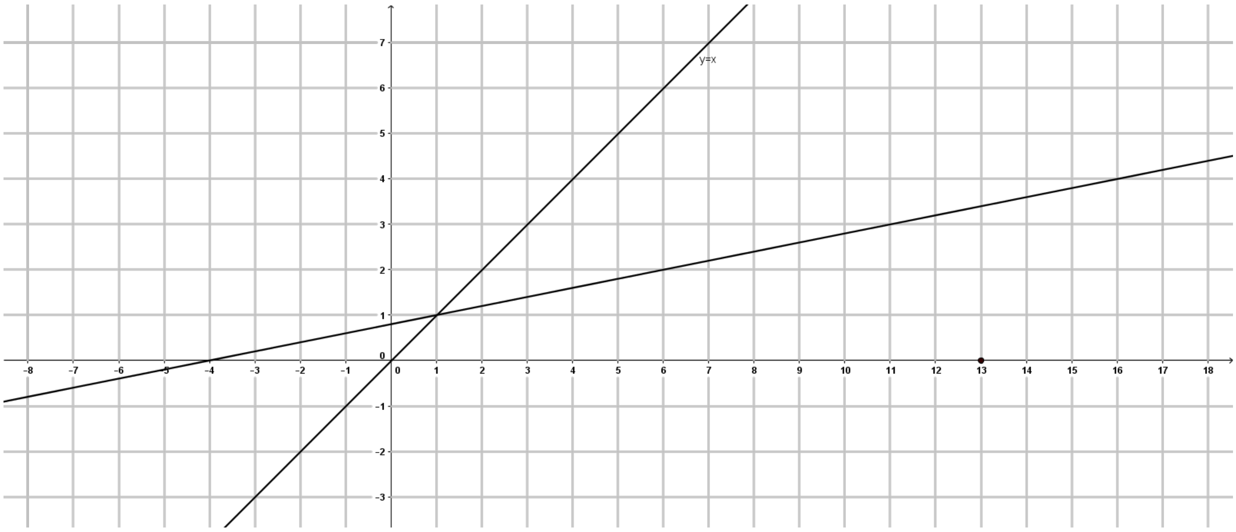
2.1 cas d'une suite explicite

Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de point de coordonnés $(n; u_n)$.
Exemple : $u_n = -\sqrt{n} + 2$ pour tout n entier naturel.



2.2 cas d'une suite récurrente

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 13 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{5} \end{cases}$



3 Sens de variation d'une suite numérique

Définition : Soit un entier p et une suite numérique (u_n).
La suite (u_n) est croissante à partir du rang p signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \geq u_n$
La suite (u_n) est décroissante à partir du rang p signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \leq u_n$

Méthode 1 : on étudie $u_{n+1} - u_n$

Méthode 2 : on étudie $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

4 Notion de limite de suite

4.1 suite convergente

Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$
On dit que la suite (u_n) converge vers 2 et on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

4.2 suite divergente

4.2.1 1er cas

$u_n = n^2 + 1$
On dit que u_n diverge vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

4.2.2 2eme cas

$v_n = (-2)^n$
Lorsque n devient grand, les termes de la suite ne se rapprochent pas d'une valeur unique.
On dit que la suite (v_n) diverge.

5 Suite arithmétique

5.1 Définition

Définition : Lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre on dit que la suite est arithmétique.

$$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$$

On dit que (u_n) est arithmétique de raison r.

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

u_0	u_1	u_2	...	u_n
1	$1+4$	$1+4+4$	...	$1+4\times n$

5.2 Formule explicite

Propriété :Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, on a la formule explicite :
$u_n = u_0 + n \times r$

Remarque : Attention ! Si le premier terme est u_1 l'expression de u_n en fonction de n est :
$u_n = u_1 + (n-1)r$

5.3 Variations

Théorème :Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r où r est un réel.

- Si $r < 0$ alors (u_n) est décroissante.
- Si $r = 0$ alors (u_n) est constante.
- Si $r > 0$ alors (u_n) est croissante.

5.4 Somme des termes d'une suite arithmétique

Théorème : Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

6 Suite géométrique

6.1 Définition

Définition : Lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours le même nombre on dit que la suite est géométrique.
$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = q \times u_n \end{cases}$
On dit que (u_n) est géométrique de raison q.

Exemple : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

u_0	u_1	u_2	...	u_n
5	5×2	5×2^2	...	5×2^n

6.2 Formule explicite

Propriété :Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, on a la formule explicite :
$u_n = u_0 \times q^n$

Remarque : Attention ! Si le premier terme est u_1 l'expression de u_n en fonction de n est :
$u_n = u_1 \times q^{n-1}$

6.3 Variations

Théorème :Soit q un réel et (v_n) une suite géométrique de raison q.

- Si $q \in]-\infty; 0[$ alors (v_n) n'est pas monotone.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (v_n) st décroissante si $v_0 > 0$ et croissante si $v_0 < 0$.
- Si $q > 1$ alors (v_n) est croisssante si $v_0 > 0$ et décroissante si $v_0 < 0$.

6.4 Somme des termes

Théorème : Soit $q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$
$1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Théorème : Soit $q \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$
$v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n = v_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$