1 Limite d'une suite

1.1 limite finie

Définition : On dit que la suite (u_n) a pour limite L, si et seulement si tout intervalle ouvert contenant L, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$

Remarques :

On dit que la suite (u_n) converge vers L.
Lorsqu'elle existe, cette limite est unique.

Exemple : Soit la suite V définie explicitement par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

V_1	V_2	V_3	...	V_{100}
2	≈ 1.71	≈ 1.58	...	1.1

a) Quelle est la limite de cette suite ? $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = 1$
b) En utilisant Python, déterminer le rang N à partir duquel les termes de la suite sont strictement inférieurs à 1.001.

```
import math
W=2
n=1
while W>=1.001:
    n=n+1
    W=1+1/math.sqrt(n)
print(n)
```

On obtient $N = 1000001$.

1.2 Limite infinie

Définition : On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si et seulement si tout intervalle $]A; +\infty[$ (resp $]-\infty; B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (resp $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$)

Exemple : Soit la suite W définie par récurrence comme suit : $\begin{cases} W_0 = 2 \\ W_{n+1} = \frac{4}{3} W_n \end{cases}$

W_0	W_1	W_2	...
2	$\frac{8}{3} \approx 2.67$	$\frac{32}{9} \approx 3.56$	...

a) Quelle est la limite de cette suite ?
$\lim\limits_{n \to +\infty} W_n = +\infty$
b) En utilisant Python, déterminer le rang N à partir duquel les termes de la suite sont strictement supérieurs à un nombre donné A. On testera le programme avec $A = 1000$, $A = 10^6$, $A = 10^{12}$

```python
def seuil(A):
    W=2
    n=0
    while W<=A:
        n=n+1
        W=W*4/3
    return(n)
```

```
>>> seuil(1000)
22
>>> seuil(1000000)
46
>>> seuil(10**12)
94
```

1.3 Vocabulaire et exemples classiques

Vocabulaire :Une suite qui n'est pas convergente est divergente.
Une suite peut être divergente et avoir une limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$)
Une suite peut ètre divergente et ne pas avoir de limite.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ On dit que cette suite converge vers 0.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ On dit que cette suite diverge vers $+\infty$

$t_n = (-1)^n$ La suite t n'a pas de limite. Elle diverge.

2 Opérations sur les limites

2.1 limite d'une somme

$\lim u_n$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim u_n + v_n$	l+l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

2.2 limite d'un produit

$\lim u_n$	l	$l \neq 0$	$\pm\infty$	0
$lim v_n$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	∞
$\lim u_n \times v_n$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

2.3 limite d'un quotient

$\lim u_n$	l	l	0	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	0	0	$\pm\infty$	l'	$\pm\infty$
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$	FI	0	$\pm\infty$	FI

FI :forme indéterminée
C'est une situation où on ne peut pas conclure directement.
Il y a 4 formes indéterminées et il faut les connaître!
$+\infty - \infty$ $0 \times \infty$ ∞/∞ $0/0$

2.4 suites polynomiales

Théorème : La limite d'une suite polynômiale est la limite de son monôme de plus haut degré.

$$\lim_{n\to+\infty} -2n^3 + 5n^2 + 2n + 1 = \lim_{n\to+\infty} -2n^3 = -\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-2n^2+3}{5n^5+2n^3+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{5n^5} = 0$$

3 Limite par comparaison et par encadrement

3.1 par comparaison

Théorème :

i) Théorèmes de comparaison
Si à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq t_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = +\infty$

ii) Si à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = -\infty$,
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration de i)
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
Pour tout réel A, il existe un entier N, tel que si $n > N$ alors $u_n \in]A; +\infty[$
Comme on a : $t_n \geq u_n$ à partir du rang P.
Alors, posons Q=max(N ;P)
Pour tout réel A, si n>Q alors $t_n \in]A; +\infty[$
donc on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = +\infty$

3.2 par encadrement

Théorème dit "des gendarmes" :
Si à partir d'un certain rang, on a : $u_n \leq t_n \leq w_n$
et si (u_n) et (w_n) convergent vers L
alors (t_n) converge vers L.

Démonstration : Soit un intervalle ouvert I contenant L.
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite u à partir du rang n_1
$\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L$ donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite w à partir du rang n_2
A partir d'un certain rang n_3, on a $u_n \leq t_n \leq w_n$
Ainsi pour tout $n \geq max(n_1, n_2, n_3)$ l'intervalle I contient tous les termes de la suite t.
c'est à dire : $\lim\limits_{n \to +\infty} t_n = L$

4 Suites majorées, minorées, bornées

4.1 Définitions

Définition :

- La suite (u_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$
- La suite $u_n)$ est dite minorée s'il existe un réel m tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$
- Une suite (u_n) est dite bornée si elle est majorée et minorée .

4.2 Convergence des suites monotones

Théorème : Soit $l \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite croissante.
Si on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors tous les termes de (u_n) sont inférieurs ou égaux à l.

Démonstration par l'absurde
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et il existe un terme u_p tel que $u_p > l$
Comme la suite (u_n) est croissante, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p$

Soit ε tel que $u_p > l + \varepsilon > l$
$\forall n \geq p, u_n \geq u_p > l + \varepsilon$ c'est à dire que pour un epsilon, tous les termes plus grands que p de la suite (u_n) seraient en dehors de l'intervalle $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$
Et ceci contredit le fait que (u_n) a pour limite l.
Donc c'est absurde, donc tous les termes de la suite sont bien inférieurs ou égaux à l.

Téorème (divergence vers l'infini)

- Si une suite (u_n) est croissante et non majorée, alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si une suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Démonstration : Soit une suite (u_n) croissante et non majorée.
(u_n) non majorée, donc pour tout intervalle $]A; +\infty[, \exists N \in \mathbb{N}, u_N \in [A; +\infty[$
Comme (u_n) croissante, on a : $\forall n \geq N, u_n \geq u_N$
Donc $\forall n \geq N, u_n \in]A; +\infty[$
Donc, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $]A; +\infty[$
Donc (u_n) diverge vers $+\infty$.

Théorème (convergence monotone)

- Si une suite (u_n) est croissante et majorée, alors la suite (u_n) converge.
- Si une suite (u_n) est décroissante et minorée, alors la suite (u_n) converge.

Remarques :

- Ce théorème est admis (on ne le démontre pas en classe de Terminale)
- Ce théorème donne la convergence mais il ne donne pas la limite.

5 Suites géométriques : comportement à l'infini

5.1 Limites

Théorème : Soit q un réel

(i) Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

(ii) Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

(iii) Si $q \leq -1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ n'existe pas

(iv) Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$

Démonstration de (i)
On utilise l'inégalité de Bernoulli.
$q > 1$ donc $\exists a > 0$ tel que $q = 1 + a$
$(1 + a)^n \geq 1 + na$
$q^n \geq 1 + na$
Comme $a > 0$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$
Et d'après le théorème de comparaison, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

5.2 Somme des termes

Théorème : $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$
$1 + q + q^2 + ... + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$