1 Résolution de l'équation

1.1 Forme canonique

Définition :a,b et c étant trois nombres réels avec $a \neq 0$, alors, pour tout x réel, on a :
$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Démonstration : $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}\right)$
$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a^2}+\dfrac{c}{a}\right]$
$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Définition : On appelle discriminant du trinôme, le nombre Δ défini comme suit :
$\Delta = b^2-4ac$

1.2 Racines de l'équation

Théorème : Soit (E) l'équation $ax^2+bx+c=0$

- Si $\Delta > 0$,alors (E) admet deux solutions distinctes
  $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, alors (E) n'admet aucune solution.

Démonstration : $ax^2+bx+c=0$
$a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$
$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0$
$\Leftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$

- Si $\Delta < 0$, alors il n'y a pas de solution
- Si $\Delta > 0$,alors on a :
  $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right) = +\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}$ ou $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right) = -\sqrt{\dfrac{\Delta}{4a^2}}$
  ce qui donne deux solutions (appelées aussi racines) distinctes.
  $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, alors on a : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0$ c'est à dire $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right) = 0$ ce qui donne une solution (appelée racine double) $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

2 Factorisation et signe

2.1 Factorisation du trinôme

Théorème : Soit $f(x) = ax^2+bx+c$

- si $\Delta < 0$ alors la factorisation est impossible.
- si $\Delta > 0$ alors on a : $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines.
- si $\Delta = 0$ alors on a : $f(x) = a(x-x_0)^2$ où x_0 est la racine double

Démonstration :
$f(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

$f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$

- Si $\Delta > 0$
  $f(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$
  $f(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$
  c'est à dire $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

- Si $\Delta = 0$
  $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = f(x)$
  c'est à dire $f(x) = a\left(x-x_0\right)^2$

- Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de factorisation possible.

2.2 Lien entre racines et coefficients

Lorsque l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux racines x_1 et x_2, alors :
$x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

Exemple : x^2-5x+6
On peut trouver facilement les racines qui sont 2 et 3.

2.3 Racine évidente

Dans certains cas, on peut trouver directement une des solutions.
On l'appelle alors racine écidente.
Exemple : $f(x) = x^2+2x-3$
On remarque que 1 est solution de $f(x) = 0$
on a donc $x^2+2x-3 = (x-1)(x-?)$
et $? = 3$

2.4 Signe du trinôme

- Lorsque $\Delta < 0$ $f(x)$
  $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc $(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$ donc le signe de $f(x)$ est le même que le signe de a.

- Lorsque $\Delta = 0$ $f(x)$
  $(x+\frac{b}{2a})^2 > 0$ donc le signe de $f(x)$ est le même que le signe de a.

- Lorsque $\Delta > 0$, on a le tableau de signes suivant :

		x_1		x_2	
a	signe de a	|	signe de a	|	signe de a
$x-x_1$	$-$	0	$+$	|	$+$
$x-x_2$	$-$	|	$-$	0	$+$
$a(x-x_1)(x-x_2)$	signe de a	|	signe de $(-a)$	|	signe de a

A RETENIR : Le trinôme est du signe de a, sauf entre ses racines éventuelles.

3 Représentation graphique

Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^2 + bx + c$
et $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.
La courbe représentative de la fonction f est une parabole dont le sommet est le point $S\left(-\dfrac{b}{2a}; f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$

Remarque : les paraboles, les hyperboles et les ellipses sont des coniques.