

Le raisonnement par récurrence est une technique de démonstration.

"Quand on ne travaillera plus les lendemains des jours de repos, la fatigue sera vaincue"(Alphonse Allais)

## 1 Hérité

$P(n)$  est vraie  $\Rightarrow P(n + 1)$  est vraie

Autrement dit : Si la propriété est vraie au rang  $n$  alors elle est vraie au rang  $n + 1$

## 2 Axiome de récurrence

Si une propriété  $P$  est :

- vraie au rang  $n_0$
- héréditaire à partir du rang  $n_0$

Alors, la propriété  $P$  est vraie pour tout entier  $n$  supérieur ou égal  $n_0$ .

Remarque : On attribue cet axiome à Giuseppe Peano (1858-1932)

## 3 Exemple

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$$

Calculer les premiers termes de cette suite. On obtient  $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 7, u_4 = 15, u_5 = 31$

On va montrer par récurrence :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$

- Initialisation : si  $n = 0$

$$\left. \begin{array}{l} 2^0 - 1 = 0 \\ u_0 = 0 \end{array} \right\} \text{ donc } u_0 = 2^0 - 1 \text{ donc la formule est vraie pour } n = 0$$

- Hérité

Supposons qu'il existe un entier naturel  $K$  tel que  $u_K = 2^K - 1$

$$u_{K+1} = 2u_K + 1$$

$$u_{K+1} = 2(2^K - 1) + 1$$

$$u_{K+1} = 2^{K+1} - 1$$

donc la propriété est vraie au rang  $K+1$

On a montré l'hérité (si elle est vraie au rang  $K$  alors elle est aussi vraie au rang  $K+1$ )

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0. Elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ .

## 4 Inégalité de Bernoulli

Théorème : Pour tout entier naturel  $n$  et tout nombre  $a$  strictement positif, on a :

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

Démonstration par récurrence : Soit  $a \in ]0; +\infty[$

- Initialisation : pour  $n = 0$

$$(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \times a$$

$P(0)$  est vraie

- Hérité : Supposons que pour un certain  $K$  entier on ait  $P(K)$  vraie, c'est à dire  $(1 + a)^K \geq 1 + Ka$

En multipliant par  $(1+a)$  strictement positif chaque membre, on obtient :

$$(1 + a)^K \times (1 + a) \geq (1 + Ka)(1 + a)$$

$$(1 + a)^K \times (1 + a) \geq 1 + (K + 1)a + Ka^2$$

$$(1 + a)^K \times (1 + a) \geq 1 + (K + 1)a + Ka^2 \geq 1 + (K + 1)a \quad (\text{car } Ka^2 \geq 0)$$

Donc, on a :  $(1 + a)^{K+1} \geq 1 + (K + 1)a$

Donc  $P(K + 1)$  est vraie et donc l'hérité est montrée.

Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in ]0; +\infty[, (1 + a)^n \geq 1 + na$