

PROBABILITES

I) Expérience aléatoire et événements

1) Expérience aléatoire

Définition : Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat de façon certaine. On ne s'intéresse qu'aux expériences aléatoires dont on peut indiquer l'ensemble des résultats possibles noté Ω .

Exemple : « Lancer un dé et noter le résultat obtenu » est une expérience aléatoire comportant 6 résultats ou issues ; l'ensemble Ω de toutes les issues est dans cet exemple $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

2) Evénements

Définition : événement, événements « A ou B », « A et B » et complémentaire.

Langage des événements	Langage des ensembles	Notation	Exemples avec le jet d'un dé
A est un événement	A est une partie de Ω	$A \subset \Omega$	A : « obtenir un nombre pair » : $A = \{2,4,6\}$
C est l'événement « A ou B »	C est la réunion de A et B	$C = A \cup B$	B : « obtenir 5 » ; C : « obtenir 2,4,5 ou 6 » : $C = \{2,4,5,6\}$
E est l'événement « A et D »	E est l'intersection de A et D	$E = A \cap D$	D : « obtenir un multiple de 3 » $D = \{3,6\}$ E : « obtenir 6 » $E = \{6\}$
A et F sont des événements complémentaires	A et F sont complémentaires	$F = \bar{A}$	A : « obtenir un nombre pair » F : « obtenir un nombre impair »

3) Langage courant : attention à l'utilisation du langage courant dans la définition des événements.

L'adverbe « exactement » est souvent utilisé ; s'il ne l'est pas, il faut faire attention : « une boule bleue et une boule numérotée 1 » lors du tirage de 2 boules n'interdit pas les issues où il y a deux boules bleues (s'il y a des boules bleues numérotées 1).

La locution « au moins un » est utilisée fréquemment et il faut souvent pensé au complémentaire qui est « aucun » : attention, par exemple, le complémentaire de « que des boules bleues » n'est pas « que des boules rouges » quand l'urne dans laquelle on tire 2 boules contient des boules bleues et des boules rouges.

II) Probabilités

1) Loi de probabilité

Définition : Soit $\Omega = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ l'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire.

Définir une loi de probabilité p sur Ω , c'est associer à chaque élément x_i de Ω , un nombre réel positif p_i appelé probabilité.

Les probabilités sont telles que :

- ① la somme des probabilités $\sum_{i=1}^n p_i$ de la loi de probabilité est égale à 1.
- ② la probabilité d'un événement A notée $p(A)$ est la somme des probabilités p_i associées à chaque élément de A.

Remarques : ① Pour tout événement A : $0 \leq p(A) \leq 1$.

② La loi de probabilité se donne souvent sous forme d'un tableau.

2) Théorèmes de probabilité

Théorème : Soit A et B deux événements d'un même ensemble Ω .

La probabilité de l'événement « A ou B » est : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Remarque : si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$), $p(A \cap B) = 0$.

Théorème : Pour tout événement A, la probabilité de l'événement complémentaire \bar{A} est : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

III) Modélisation d'expériences aléatoires

1) Définition : Modéliser une expérience aléatoire, c'est associer à cette expérience une loi de probabilité p sur l'ensemble Ω des résultats possibles.

2) Loi des grands nombres

Propriété : Soit un ensemble Ω sur lequel on définit une loi de probabilité p . Les fréquences des éléments de Ω dans une suite de n expériences identiques et indépendantes tendent vers leur probabilité quand n augmente indéfiniment.

Remarques : ① Dans certains cas, on utilise cette propriété pour valider ou rejeter le modèle choisi.

② Dans d'autres cas, on définit une loi de probabilité pour une expérience difficilement modélisable à partir des fréquences obtenues pour un grand nombre d'expériences.

3) Le modèle d'équiprobabilité

Définition : Si les probabilités associées à chacun des éléments d'un ensemble Ω sont égales, alors on dit qu'il y a équiprobabilité.

Théorème : Soit un événement A d'un ensemble Ω sur lequel on a défini une loi d'équiprobabilité (ou équirépartie) p . Alors $p(A)$ est le quotient du nombre d'éléments de A par le nombre d'éléments de Ω :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles}} .$$

Remarque : Les termes « équilibré », « indiscernables », « choix au hasard » indiquent que pour les expériences réalisées, le modèle associé est l'équiprobabilité.

IV) Modèles d'urnes

1) Tirage d'une boule dans une urne en contenant n : l'ensemble Ω des résultats possibles contient n issues, les n boules.

2) Tirage de 2 boules (ou plus) : on peut utiliser un arbre ou un tableau à double entrée.

① Tirage successif avec remise : les issues sont des couples ordonnés (où l'ordre est à prendre en compte) et Ω contient n^2 issues.

② Tirage successif sans remise : les issues sont des couples ordonnés, il ne peut y avoir de doublons ; Ω contient $n \times (n - 1)$ issues.

③ Tirage simultané : les issues sont des paires et Ω en contient $\frac{n(n-1)}{2}$.

3) Exemple : Attention de ne pas confondre la description de l'expérience et le modèle à choisir. On considère l'expérience qui consiste à lancer deux dés équilibrés (simultanément) et à noter les numéros sortis. Le modèle adapté ici est le tirage successif avec remise car il peut y avoir répétition (doublons) : l'adverbe « simultanément » ne signifie pas forcément modèle de tirage simultané.