PROBABILITES CONDITIONNELLES-INDEPENDANCE

1 Probabilité conditionnelle

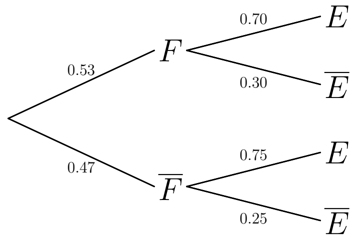
1.1 Définition

On note $P_A(B)$ la probabilité d'avoir l'événement B, sachant que l'événement A est réalisé.
On a alors : $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$

Remarque : $P_A(B)$ se lit "probabilité de B sachant A"

1.2 Représentation par un arbre pondéré

Exemple : Dans un lycée, 53% des élèves sont des filles et 70% sont externes,
contre 75% pour les garçons.



Propriétés
- Sur chaque branche on écrit la probabilité correspondante.
- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est 1.
- Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersections des événements placés sur son chemin
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à cet événement.

1.3 probabilités totales

Théorème :
Soit A_1 , A_2 ,...,A_n une partition de l'univers Ω.
(ensembles 2 à 2 incompatibles et dont l'union forme Ω)
Alors, pour tout événement B, on a :
$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + ... + p(B \cap A_n)$

2 Evénements indépendants

Définition :
On dit que deux événements A et B sont indépendants si :
$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Remarques : En divisant chaque membre par $p(B) \neq 0$ on obtient : $p_B(A) = p(A)$
Les événements sont dits indépendants car la probabilité de A ne dépend pas de celle de B.

Théorème : Si les événements A et B sont indépendants, il en est de même pour :
- $\overline{A}$ et B
- A et $\overline{B}$
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$

Démonstration du premier point :
A et $\overline{A}$ forment une partition de Ω
(c'est à dire que l'on a : $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$)
A et B sont indépendants, donc : $p(A \cap B) = p(A)p(B)$
Formules des probabilités totales donne : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$
$p(B) = p(B)p(A) + p(B \cap \overline{A})$
$p(B)(1 - p(A)) = p(B \cap \overline{A})$
$p(B)p(\overline{A}) = p(B \cap \overline{A})$
donc B et $\overline{A}$ sont indépendants.