

Primitives-Equations différentielles

1 Primitive

1.1 Définition

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle. Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$

1.2 Existence

Théorème (admis) Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur I

1.3 Ensemble des primitives d'une fonction

Théorème : f est une fonction définie et continue sur un intervalle I , qui admet une primitive F sur I . Alors, f admet une infinité de primitives sur I , et toute primitive G de f sur I est définie par : $G(x) = F(x) + k$ (k constante réelle)

primitive admettant une valeur donnée en un point donné (condition initiale)

Théorème : Si f admet des primitives sur I , alors il existe une primitive G unique de f telle que : $G(x_0) = a$ avec $x_0 \in I$ et $a \in \mathbb{R}$

1.4 Calcul de primitives

Par lecture inverse du tableau des dérivées, on obtient le tableau suivant

1.4.1 fonctions usuelles

fonction	primitives	domaine
$f(x) = a$ avec $(a \in \mathbb{R})$	$F(x) = ax + K$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x) + K$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + K$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + K$	\mathbb{R}
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + K$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + K$	\mathbb{R}

1.4.2 linéarité

Sur l'intervalle I , si F est une primitive de f et G une primitive de g , alors $F+G$ est une primitive de $f+g$.
Sur un intervalle I , si F est une primitive de f et α un réel, alors αF est une primitive de αf .

1.4.3 formes usuelles

fonction	primitives
$u'u^n$ avec n entier	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	\sqrt{u}
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $

2 Equations différentielles

2.1 Equations différentielles du type $y' = ay$

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante quelconque.

Démonstration (prog) :

- Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel .
Alors $f'(x) = Ca e^{ax} = af(x)$
Donc $f'(x) = af(x)$
 f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$
- Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$
Et soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$
 g est dérivable sur \mathbb{R} et on a : $g'(x) = e^{-ax} f'(x) - ae^{-ax} f(x)$
Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ on a $f'(x) = af(x)$
Ainsi $g'(x) = e^{-ax} \times af(x) - ae^{-ax} \times f(x) = 0$
La fonction g est donc égale à une constante réelle C :
 $e^{-ax} \times f(x) = C$ et par suite $f(x) = Ce^{ax}$

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et λf , $\lambda \in \mathbb{R}$ sont également solutions de cette équation différentielle.

Démonstration :

$$(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$$
$$(\lambda f)' = \lambda f' = \lambda(af) = a(\lambda f)$$

2.2 Equations du type $y' = ay + b$

Propriété : La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$, ($a \neq 0$).
Cette solution est appelée solution particulière constante.

Démonstration : On pose $g(x) = -\frac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$

$$\text{Or } ag(x) + b = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0$$

Donc $g'(x) = ag(x) + b$ et g est donc solution de l'équation $y' = ay + b$

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme :
 $x \mapsto u(x) + v(x)$

où u est la solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$
et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Corollaire : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme
 $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$.

2.3 Equations du type $y' = ay + f$

Propriété : Soit a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I .
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme :
 $x \mapsto u(x) + v(x)$

où u est une solution particulière de l'équation $y' = ay + f$
et v une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.