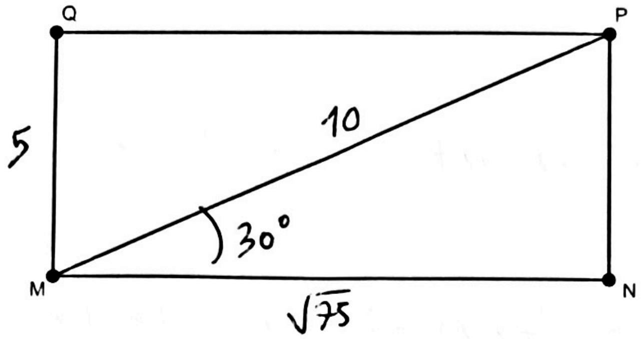
Exercice 1 (6 points)

MNPQ est un rectangle avec $MN = \sqrt{75}$, $MQ = 5$, $MP = 10$ et $\widehat{NMP} = 30°$



Calculer les produits scalaires suivantes :

a) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MQ} = 0$

b) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = \sqrt{75} \times 10 \times \cos 30° = 75$

c) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{PQ} = \sqrt{75} \times \sqrt{75} \times (-1) = -75$

d) $\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{NP} = 25$

e) $\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}) . \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{MQ} = 25$

f) $\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ}.(-\overrightarrow{MP}) = -\overrightarrow{MP}.\overrightarrow{MQ} = -25$

Exercice 2 1)

$\vec{AB}\begin{pmatrix}-2-2\\1-2\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\cdot\vec{AD} = (-4)(1) + (-1)(-4) = -4+4 = 0$

$\vec{AD}\begin{pmatrix}3-2\\-2-2\end{pmatrix}$ $\vec{AD}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$

2) $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1-2\\-3-2\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}$ $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (-4)(-3)+(-1)(-5) = 12+5 = 17$

3) $\vec{BD}\begin{pmatrix}3-(-2)\\-2-1\end{pmatrix}$ $\vec{BD}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ $\vec{BD}\cdot\vec{AC} = 5(-3)+(-5)(-3) = +15-15 = 0$

Les vecteurs $\vec{BD}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux donc les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires.
Le quadrilatère ABCD a ses diagonales qui sont perpendiculaires.

4) $BD = \sqrt{5^2+(-3)^2} = \sqrt{34}$

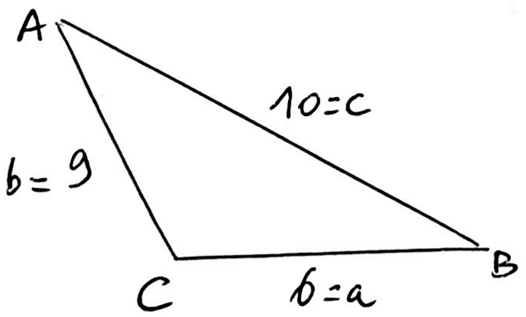
$AC = \sqrt{(-3)^2+(-5)^2} = \sqrt{34}$

$\left.\right\}$ $BD = AC$

Les diagonales sont perpendiculaires, de même longueur et de même milieu donc le quadrilatère ABCD est un carré

I = milieu de [BD] $I\left(\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$
= milieu de [AC]

Exercice 3



Formule d'Al-Kashi

$a^2 = b^2+c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

$\cos\hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\hat{A} = \cos^{-1}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{145}{180}\right)$

$\hat{A} \approx 36{,}3°$

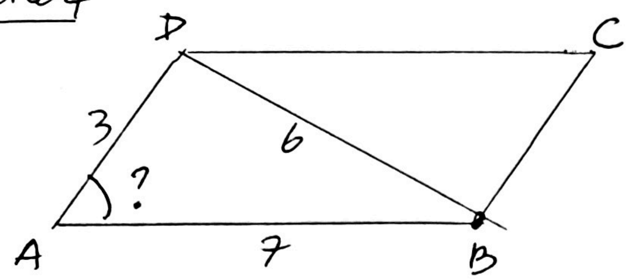
$\hat{B} = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{55}{120}\right)$

$\hat{B} \approx 62{,}7°$

$\hat{C} = \cos^{-1}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{17}{108}\right)$

$\hat{C} \approx 80{,}9°$

Exercice 4



$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

1)

$$\vec{AB}.\vec{AD} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AD}\|^2 - \|\vec{AB}-\vec{AD}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(AB^2 + AD^2 - DB^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(49 + 9 - 36\right)$$

$$= 11$$

2) $\vec{AB}.\vec{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD})$

$$11 = 7 \times 3 \times \cos(\widehat{BAD})$$

$$\cos(\widehat{BAD}) = \frac{11}{21}$$

$$\widehat{BAD} \approx 58{,}4^\circ$$