Exercice 1

1) -4 et 1 sont des solutions de $f(x)=0$

d'où $f(x) = \alpha\,(x+4)(x-1)$

De plus, on lit graphiquement $f(0)=-2$

ce qui donne $\alpha(0+4)(0-1)=-2 \iff -4\alpha=-2 \iff \alpha=\frac{1}{2}$

Finalement $f(x) = \frac{1}{2}(x+4)(x-1)$

2) En développant, on obtient

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2+3x-4)$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$$ d'où $a=\frac{1}{2}$ $b=\frac{3}{2}$ $c=-2$

3) $S\left(-\frac{3}{2}\,;\,-\frac{25}{8}\right)$

x	$-\infty$	$-1,5$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	$-25/8$	↗ $+\infty$

Exercice 2

1) $x^2-5 = (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

2) $x^4-7x^3+12x^2 = x^2(x^2-7x+12) = x^2(x-4)(x-3)$

Exercice 3

$$f(x) = -5x^2+12x+3$$

$$f(x) = -5\left(x^2-\frac{12}{5}x-\frac{3}{5}\right)$$

$$f(x) = -5\left[\left(x-\frac{6}{5}\right)^2-\frac{36}{25}-\frac{3}{5}\right]$$

$$f(x) = -5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{51}{5}$$ ← forme canonique

le sommet de la parabole est $S\left(\frac{6}{5}\,;\,\frac{51}{5}\right)$

$g(x) = 3x^2 - 6x + 10$

$g(x) = 3\left(x^2 - 2x + \frac{10}{3}\right)$

$g(x) = 3\left[(x-1)^2 - 1 + \frac{10}{3}\right]$

$g(x) = 3(x-1)^2 + 7$

Le sommet de la parabole est $S'(1\,;\,7)$

Exercice 4

1) $(x+1)(-3x^2 + 15x + 6) = 0$

$x + 1 = 0$ ou $-3x^2 + 15x + 6 = 0$

$x = -1$

$\Delta = 225 - 4(-3)6$

$\Delta = 297 = (3\sqrt{33})^2$

$x_1 = \frac{5 - \sqrt{33}}{2}$ $x_2 = \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$

$S = \left\{ \frac{5-\sqrt{33}}{2}\,;\,-1\,;\,\frac{5+\sqrt{33}}{2} \right\}$

2) $x + \frac{1}{x} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 3$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = 3x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4(1)(1) = 5 > 0$

$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ $x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$

$S = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}\,;\,\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\}$

Exercice 5

1) $-x^2-4x-3 < 0$

$\Delta = 16 - 4(-1)(-3) = 4 = (2)^2$

$x_1 = \dfrac{4-2}{-2} = -1 \qquad x_2 = -3$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$-x^2-4x-3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty ; -3[\cup]-1 ; +\infty[$

2) $-x^2+10x-25 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad -(x-5)^2 \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \quad -(x-5)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = 5$

$S = \{5\}$

3)

$-x^2-2x+3 = -(x-1)(x+3)$

$\Delta = 4-4(-1)(3)$

$\Delta = 16 = 4^2$

$x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$

x	$-\infty$		-3		-1		1		3		$+\infty$
$-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2-2x-3		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-x^2-2x+3}{x^2-2x-3}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$S = [-3 ; -1[\cup [1 ; 3[$

Exercice 4

$$\mathcal{A}_{OIC} = \frac{1}{2}\, OC \times OI = 1$$

Exprimons l'aire du triangle AIB en fonction de a

$$\mathcal{A}_{AIB} = \frac{1}{2}\, AI \times AB$$

$$\mathcal{A}_{AIB} = \frac{1}{2}(1-a)(2-2a)$$

$$\mathcal{A}_{AIB} = a^2 - 2a + 1$$

En fait, on cherche a tel que l'aire de $\mathcal{A}_{IB}$ soit égale à $\frac{1}{2}$

On doit donc résoudre l'équation suivante

$$a^2 - 2a + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 - 2a + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(1)\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 > 0$$

valeur exacte $\rightarrow a_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cancel{a_2 = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} > 1}$

on exclut cette valeur qui est supérieure à 1

$a_1 \approx 0{,}29$

valeur arrondie au centième

La valeur de a telle que l'aire de AIB est la moitié de l'aire de OIC est $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.