Exercice 1 (2 points)

Compléter le tableau.

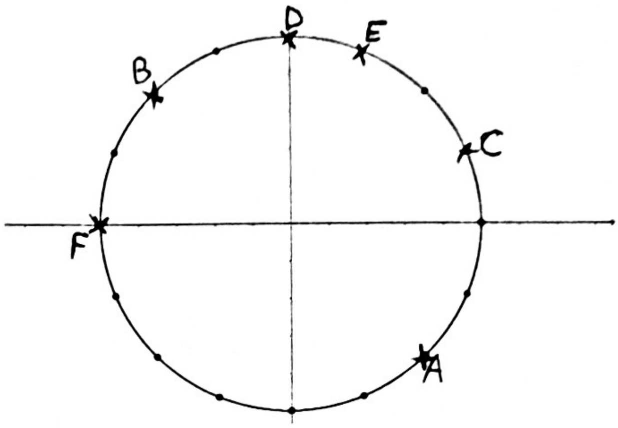
x	5π	$-\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{-4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$
cos x	-1	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	0
sin x	0	$\sqrt{2}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	-1

Exercice 2 (3 points)

Sur le cercle trigonométrique, placer les points

$A\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$, $C\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$D\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$, $E\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, $F\left(-3\pi\right)$



Exercice 3 (2 points)

1) Les angles suivants sont donnés en radian. Donner leur mesure dans l'intervalle $[-\pi;\pi[$.

$\frac{12\pi}{11}$, $\frac{-19\pi}{13}$

2) Les angles suivants sont donnés en radian. Donner leur mesure dans l'intervalle $[2\pi;4\pi[$.

$\frac{40\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{7}$.

Exercice 4 (2 points)

1) Résoudre l'équation suivante :

$2\cos x+\sqrt{2}=0$ dans $]-\pi;\pi]$

2) Résoudre l'inéquation suivante :

$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $[0;2\pi[$

Exercice 5 (2 points)

Soit x un nombre réel.
Donner les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(2\pi+x)+\cos(\pi-x)+\sin(\pi+x)$$

$$B=\sin(\pi+x)+3\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+2\sin(-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$$

Exercice 3

1) $\frac{12\pi}{11} \equiv -\frac{10\pi}{11} \; [2\pi]$ $\qquad -\pi \leq -\frac{10\pi}{11} < \pi$

$-\frac{19\pi}{13} \equiv \frac{7\pi}{13} \; [2\pi]$ $\qquad -\pi \leq \frac{7\pi}{13} < \pi$

2) $\frac{40\pi}{3} = \underbrace{6 \times \frac{6\pi}{3}}_{\text{6 tours}} + \frac{4\pi}{3}$

1 tour + $\frac{6\pi}{3}$

$\frac{40\pi}{3} \equiv \frac{10\pi}{3}$ et $2\pi \leq \frac{10\pi}{3} < 4\pi$

$-\frac{5\pi}{7} + \frac{28\pi}{7} = \frac{23\pi}{7}$

$-\frac{5\pi}{7} \equiv \frac{23\pi}{7}$ et $2\pi \leq \frac{23\pi}{7} < 4\pi$

Exercice 4

$2\cos x + \sqrt{2} = 0$

$\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \frac{-3\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

$S_{]-\pi,\pi]} = \left\{-\frac{3\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}\right\}$

$\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$

$S_{[0,2\pi[} = \left]\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3}\right[$

Exercice 5

$A = \sin x + \cos x - \cos x - \sin x$

$A = 0$

$B = -\sin x + 3\sin x - 2\sin x - \sin x$

$B = -\sin x$

Exercice 6

$2 < \sqrt{5} < 3$ donc $1 < \sqrt{5} - 1 < 2$ donc $\frac{1}{4} < \frac{\sqrt{5}-1}{4} < \frac{1}{2}$

donc $\cos x \geqslant 0$ donc $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

1) $x \in [0; \pi]$ donc $\sin x \geqslant 0$

2) D'après le préambule, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ donc les valeurs $\frac{-4\pi}{5}$ et $\frac{-2\pi}{5}$ sont exclues

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{4\pi}{5} \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{array}\right\}$$ donc $\frac{2\pi}{5}$ est la seule valeur candidate

3) $$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 + \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \frac{16 - (6 - 2\sqrt{5})}{16}$$

$$\sin^2 x = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{16}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$ ou $$\sin x = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

on exclut
cette valeur
car $\sin x > 0$

Finalement : $$\sin x = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Exercice 7 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f(x) = 2 - 2x$$

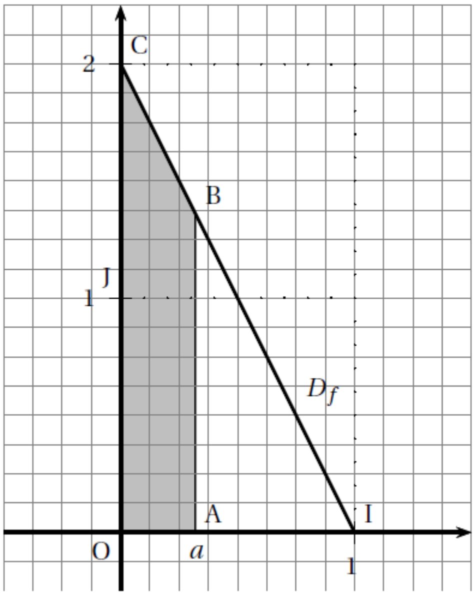
On a tracé ci-contre la droite D_f, représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

Le point C a pour coordonnées $(0;2)$.

Δ est la partie du plan intérieure au triangle OIC.

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1 ; on note A le point de coordonnées $(a;0)$ et B le point de D_f de coordonnées $(a; f(a))$.

Le but de cet exercice est de trouver la valeur de a, telle que le segment [AB] partage Δ en deux parties de même aire.



L'aire du triangle OIC rectangle en O vaut $\dfrac{\text{OI} \times \text{OC}}{2} = \dfrac{1 \times 2}{2} = 1$.

Il faut donc chercher la position du point A de coordonnées $(a;0)$ pour que l'aire du trapèze OABC soit égale à l'aire du triangle AIB.

Autrement dit, il faut que l'aire du triangle AIB soit la moitié de celle du triangle OIC, soit $\dfrac{1}{2}$.

L'aire du triangle OIB rectangle en A vaut $\mathscr{A} = \dfrac{\text{AI} \times \text{AB}}{2}$.

Le point B a pour abscisse a et pour ordonnée $f(a) = 2 - 2a$; le point A a pour coordonnées $(a;0)$ donc $\text{AB} = 2 - 2a$.

Le point I a pour coordonnées $(1;0)$ donc $\text{AI} = 1 - a$.

$\mathscr{A} = \dfrac{(1-a)(2-2a)}{2}$ et on doit avoir $\mathscr{A} = \dfrac{1}{2}$.

On résout dans $[0;1]$ l'équation $\dfrac{(1-a)(2-2a)}{2} = \dfrac{1}{2}$:

$\dfrac{(1-a)(2-2a)}{2} = \dfrac{1}{2} \iff 2 - 2a - 2a + 2a^2 = 1 \iff 2a^2 - 4a + 1 = 0$

Cette équation a pour solutions $a' = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ et $a'' = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Mais $a' \notin [0;1]$ donc pour que les deux aires soient égales, il faut prendre $a = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0,29$.

Exercice 1

Un point $M(x;y)$ sera un point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_m$ si ses coordonnées vérifient $y=f(x)$ et $y=g_m(x)$

$$M \in \mathcal{C}_f \cap \mathcal{C}_g \iff \begin{cases} y = f(x) \\ y = g_m(x) \end{cases}$$

On va résoudre $f(x) = g_m(x)$

$$\iff (1-m)x^2 + 2x + 1 = 0$$

$\boxed{\text{Premier cas : } m = 1}$ on obtient une équation de degré 1

$$2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$$

Il y a donc un unique point d'intersection $A\left(\frac{-1}{2} ; \frac{-3}{4}\right)$

$\boxed{\text{Deuxième cas : } m \neq 1}$ on résout une équation du deuxième degré

$$\Delta = 2^2 - 4(1-m)(1)$$
$$\Delta = 4m$$

$\Delta > 0 \iff 4m > 0 \iff m > 0$ il y a 2 solutions donc 2 points d'intersection

$\Delta = 0 \iff m = 0$ il y a 1 solution donc 1 point d'intersection

$\Delta < 0 \iff m < 0$ il n'y a pas de solution et aucun point d'inters.

$\boxed{\text{Conclusion}}$:

* Si $m = 0$ ou $m = 1$ il y a un point d'intersection
* Si $m \in]0;1[\cup]1;+\infty[$ il y a 2 points d'intersection
* Si $m \in]-\infty;0[$ pas de point d'intersection