

# 1 Définition et propriétés

## 1.1 Norme d'un vecteur

Définition : Soit un vecteur  $\vec{u}$  et deux points A et B tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ .  
La norme du vecteur  $\vec{u}$  notée  $\|\vec{u}\|$  est la distance AB.

## 1.2 Définition du produit scalaire

Définition : Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan.  
On appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  par  $\vec{v}$  et on note  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  le nombre défini comme suit :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  si  $\vec{u} = 0$  ou  $\vec{v} = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$  sinon

Remarque :  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \widehat{BAC}$

## 1.3 Propriété de symétrie

Propriété : Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$   
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Preuve :  $\cos(-(\vec{v}; \vec{u})) = \cos(\vec{v}; \vec{u})$

## 1.4 Propriété du produit scalaire

Remarques :

- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de même sens,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires de sens contraires,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

Propriétés : Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  on a :

i)  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

ii)  $\vec{u} \cdot k\vec{v} = k\vec{u} \cdot \vec{v}$  avec  $k \in \mathbb{R}$

## 1.5 Identités remarquables

Propriétés : Pour tous vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :

1)  $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

2)  $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$

3)  $(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Preuve :

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

# 2 Produit scalaire et norme

Propriété : Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

### 3 Produit scalaire et orthogonalité

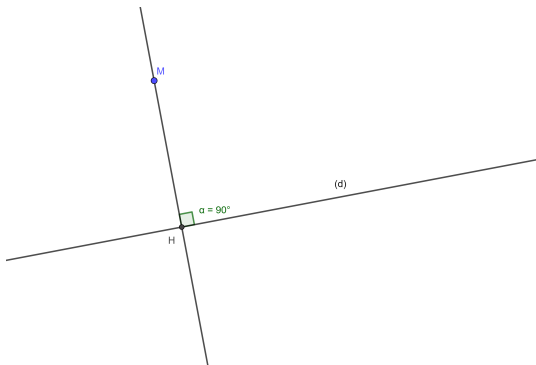
#### 3.1 Vecteurs orthogonaux

Propriété : Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

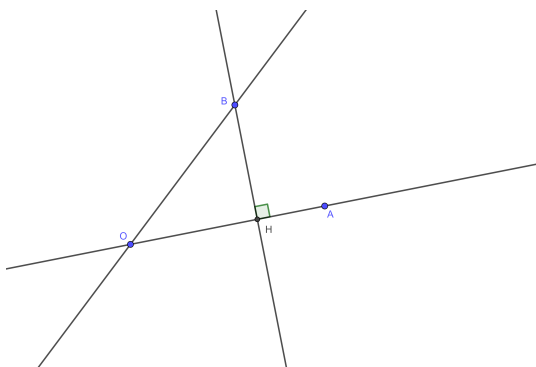
#### 3.2 Projection orthogonale

Définition : Soit une droite (d) et un point M du plan.

Le projeté orthogonal du point M sur la droite (d) est l'intersection H de la droite (d) avec la perpendiculaire à (d) passant par M.



Propriété : Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .  
H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA).  
On a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$



Démonstration :  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB})$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

### 4 Produit scalaire dans un repère orthonormé

Propriété : Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs.  
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Preuve :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' \|\vec{i}\|^2 + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy' \|\vec{j}\|^2$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

Le repère étant orthonormé, on a :  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$  et  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$

## 5 Applications du produit scalaire

### 5.1 Théorème de la médiane

Propriété : Soit deux points A et B et I le milieu du segment [AB].

Pour tout point M, on a :  $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

Démonstration :

$$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$$

$$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$$

$$MA^2 + MB^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$$

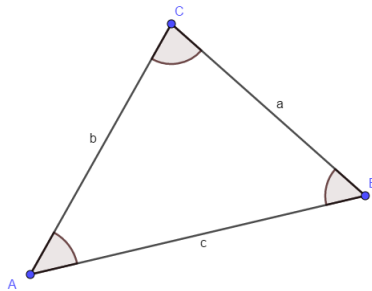
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$$

### 5.2 Théorème d'Al Kashi

Théorème :

Dans un triangle ABC qui respecte les notations de la figure, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$



Démonstration : On utilise deux formules du produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = b \times c \times \cos \hat{A} \quad (\text{i})$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \quad (\text{ii})$$

Grâce à (i) et (ii), on obtient :  $\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) = bc \cos \hat{A}$

Finalement :  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$