Représentations paramétriques-Equations cartésiennes (géométrie 3)

1 Représentation paramétrique d'une droite

Théorème : Soit une droite (Δ) définie par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

La droite (Δ) admet une représentation paramétrique, de la forme :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Démonstration :

$M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

$M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases}$

2 Représentation paramétrique d'un plan

Théorème : Soit un plan $(\mathscr{P})$ défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et deux vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$

Le plan $(\mathscr{P})$ admet une représentation paramétrique, de la forme :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' s \\ y = y_A + \beta t + \beta' s \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } s \in \mathbb{R} \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' s \end{cases}$$

3 Equation cartésienne d'un plan

Théorème : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un RON.

- Un plan P de vecteur normal $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul

  admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

- Réciproquement si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$,l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$ est un plan.

Démonstration (à connaître) :

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de (P).
  $M(x; y; z) \in (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux. $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow a(x - x : A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$
  $\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -ax_A - by_A - cz_A$

- Réciproquement, supposons que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ par exemple $a \neq 0$
  On note E l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$
  Alors $A(-\frac{d}{a}; 0; 0)$ vérifie l'équation $ax + by + cz + d = 0$ et donc $A \in E$
  Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Pour tout $M(x; y; z)$ on a :
  $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a(x + \frac{d}{a}) + b(y - 0) + c(z - 0) = ax + by + cz + d = 0$
  E est donc l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
  Donc l'ensemble E est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.