

1 Produit scalaire dans l'espace

1.1 Définition et propriétés

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de l'espace. A,B,C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe un plan (P) contenant les points A,B et C.

Définition :
On appelle produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} dans l'espace, le nombre égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans le plan P.

On a ainsi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si \vec{u} ou \vec{v} est nul
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v})$

Propriétés : Soit \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs de l'espace.
1) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
 $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$
 $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
4) $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} sont orthogonaux.

Propriétés :
 $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
 $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Propriétés :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$

1.2 Produit scalaire dans un repère orthonormé

Définition : Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est orthonormée si :
 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
 $\|\vec{i}\| = 1, \|\vec{j}\| = 1, \|\vec{k}\| = 1$

Définition : Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace est orthonormé si la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormée.

Propriété : Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Remarque : En particulier, on a : $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2 + z^2$
d'où $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Démonstration :
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k})$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'\vec{i} \cdot \vec{i} + xy'\vec{i} \cdot \vec{j} + xz'\vec{i} \cdot \vec{k} + yx'\vec{j} \cdot \vec{i} + yy'\vec{j} \cdot \vec{j} + yz'\vec{j} \cdot \vec{k} + zx'\vec{k} \cdot \vec{i} + zy'\vec{k} \cdot \vec{j} + zz'\vec{k} \cdot \vec{k}$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Propriété (distance entre deux points) : Dans un repère orthonormé où $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$.
 $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Orthogonalité de deux droites

Définition : Deux droites de l'espace sont orthogonales lorsque leurs parallèles passant par un point quelconque sont perpendiculaires.

2.2 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite d est orthogonale à un plan P si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de P .

Propriété : Si une droite (d) est orthogonale à un plan P , alors elle est orthogonale à toutes les droites de P .

Démonstration :

Soit une droite (d) de vecteur directeur \vec{n} orthogonale à deux droites sécantes (d_1) et (d_2) de (P) .

Soit \vec{u} et \vec{v} des vecteurs directeurs de (d_1) et (d_2) .

Alors \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur \vec{n} .

Soit une droite (Δ) de P de vecteur directeur \vec{w} .

Démontrons que (Δ) est orthogonale à (d) .

\vec{w} peut se décomposer suivant \vec{u} et \vec{v} non colinéaires.

$\exists (a; b) \in \mathbb{R}^2$ tq $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Donc $\vec{w} \cdot \vec{n} = a\vec{u} \cdot \vec{n} + b\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ car \vec{n} est orthogonal avec \vec{u} et \vec{v} .

Donc \vec{n} est orthogonal au vecteur \vec{w}

Donc (d) est orthogonale à (Δ)

3 Vecteur normal

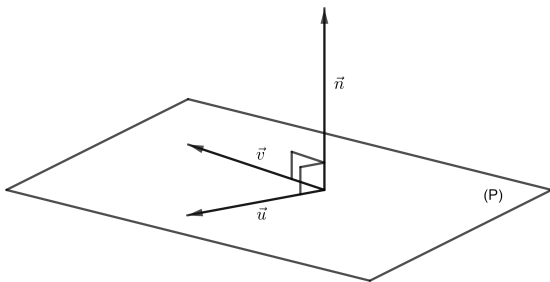
Définition : Un vecteur non nul \vec{n} est normal à un plan P lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans P .

Propriété : Soit un point A et un vecteur \vec{n} non nul de l'espace.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan de l'espace.

Réciproquement, soit P un plan de l'espace. Pour tout point A de P et tout vecteur normal \vec{n} de P , P est l'ensemble des points tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Un vecteur non nul \vec{n} de l'espace est normal à un plan P , s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P .

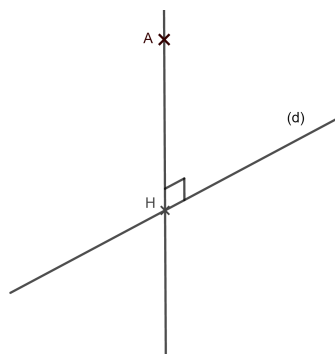


4 Projeté orthogonal

4.1 Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition : Soit un point A et une droite (d).

La projection orthogonale de A sur (d) est le point H appartenant à (d) tel que la droite (AH) soit perpendiculaire à la droite (d).



4.2 Projection orthogonale d'un point sur un plan

Définition : Soit un point A et un plan P de l'espace.

La projection orthogonale de A sur P est le point H appartenant à P tel que la droite (AH) soit orthogonale au plan P.

Propriété : Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan P est le point de P le plus proche de M.

Démonstration :

Soit H le projeté orthogonal du point M sur le plan P.

Supposons qu'il existe un point K du plan P plus proche de M que le point H.

$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M.

Par suite $KM^2 \leq HM^2$

Or (MH) est orthogonale à P, donc (MH) est orthogonale à toute droite de P.

En particulier, (MH) est perpendiculaire à (HK).

Le triangle MHK est donc rectangle en H.

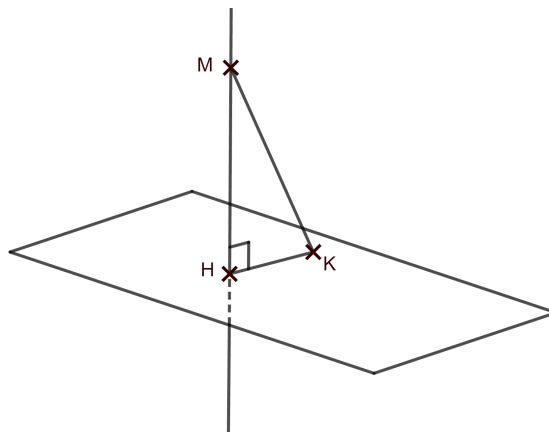
D'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$

Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$

Donc $HK^2 \leq 0$, ce qui est impossible

sauf dans le cas où le point K est le point H.

On en déduit que H est le point du plan le plus proche de M.



5 Distances

Propriétés : Soit A un point appartenant à un plan \mathcal{P} et de vecteur normal \vec{n} et M un point n'appartenant pas à \mathcal{P} .

La distance MH avec H projeté orthogonal de M sur \mathcal{P} est la distance du point M au plan \mathcal{P} .

$$MH = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

