1 Définitions

1.1 Définition d'une matrice

Une matrice de format (n,p) contient n lignes et p colonnes.
Elle contient des nombres appelés les coefficients.
Le coefficient de la ligne i et de la colonne j est : a_{ij}
Remarques : si $n=1$, c'est une matrice ligne
si $p=1$, c'est une matrice colonne
si $n=p$, c'est une matrice carrée.
si tous les coefficients sont nuls, c'est une matrice nulle.

1.2 matrices égales

Deux matrices sont égales si elles ont le même format et les mêmes coefficients aux mêmes emplacements.

1.3 transposée

La matrice transposée d'une matrice A de format (n,p) est la matrice de format (p,n) , notée A^T, obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A ;

Exemple : $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

2 Addition de deux matrices

On appelle somme de deux matrices de même format, la matrice obtenue en additionnant les coefficients de même emplacement
Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Théorème : A,B et C sont des matrices de même format. 0 est la matrice nulle de même format.
1) A+B=B+A (commutativité)

2) A+(B+C)=(A+B)+C (associativité)

3)A+0=0+A=A

3 Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Définition : On appelle produit d'une matrice par un nombre réel la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients par ce nombre

Exemple : $-2 \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 6 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

Théorème : M et M' sont deux matrices de même format. O est la matrice nulle de même format.
1) 0M=0 et 1M=M
2) α et β étant deux nombres réels
$(\alpha+\beta)M = \alpha M + \beta M$
$\alpha(M+M') = \alpha M + \alpha M'$
$(\alpha\alpha')A = \alpha(\alpha' A)$

Définition : On appelle opposée de M, la matrice $(-1)M$ notée $-M$, et on note $A-B$ la matrice $A+(-B)$

Conséquences : $M-M$ est la matrice nulle, et l'égalité $M+A=B$ équivaut à $M=B-A$

4 Multiplication de deux matrices

Définition : Le produit de la matrice ligne $L = (a_1a_2...a_p)$ par la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ est le nombre
$LC = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p = \sum\limits_{k=0}^{p} a_kb_k$
Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de format (n, p) par une matrice $B = (b_{ij})$ de format (p, q) est la matrice notée AB de format (n, q) dont le coefficient (c_{ij}) est le produit de la matrice ligne i de A par la matrice colonne j de B :
$c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Remarques : En général $AB \neq BA$

Théorème : A,B et C sont des matrices dont les formats permettent les calculs indiqués, k désigne un nombre.
1) $A(BC) = (AB)C$
2) $A(B + C) = AB + AC$
3) $(A + B)C = AC + BC$
4) $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

Remarque :
Si $A = 0$ ou $B = 0$ alors $AB = 0$
La réciproque est fausse $AB = 0$ peut être vérifiée sans que $A = 0 \text{ou} B = 0$
Ainsi $AM = AN$ peut être vérifiée sans que $M = N$

5 Matrices carrées

5.1 matrice carrée et matrice unité

Définition : d est un entier naturel non nul
On appelle matrice carrée d'ordre d toute matrice de format (d, d)

Définition : On appelle matrice unité d'ordre d la matrice I, carrée d'ordre d, dont les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale principale qui sont égaux à 1.

exemple : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice unité d'ordre 2 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrice unité d'ordre 3

Théorème : Pour toute matrice carrée d'ordre d,on a : $IM = MI = M$
Pour toute matrice colonne C de format $(d, 1)$,on a : $IC = C$
Pour toute matrice ligne L de format $(1, d)$,on a : $LI = L$

5.2 puissance d'une matrice carrée

Définition : n est un entier naturel non nul et A est une matrice carrée. La puissance nième de la matrice A, notée A^n, est la matrice définie par :
$A^n = \underbrace{AA...A}_{\text{n fois}}$

Théorème : Pour tout entier naturel n et tous nombres a et b :
$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$

5.3 Inverse d'une matrice carrée

Définition :
A est une matrice carrée d'ordre d. On dit qu'une matrice B, carrée d'ordre d, est inverse de A si elle vérifie :
$AB = I$ et $BA = I$

Théorème : Si la matrice carrée A admet une matrice inverse, celle-ci est unique. On la note : A^{-1}

Théorème : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.
1) Si $ad - bc \neq 0$, A admet une matrice inverse $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

2) Si $ad - bc = 0$, A n'a pas d'inverse.

Théorème : A,M,N sont des matrices carrées de même ordre. 0 est la matrice nulle de même ordre. On suppose que A est inversible.
1) si $AM = 0$ alors $M = 0$
2) si $AM = AN$, alors $M = N$

5.4 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y est de la forme :(S)$\left\{\begin{array}{l} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{array}\right.$ où a,b,c,d,e,f sont des nombres.

Les solutions de ce système sont les couples (x ;y) vérifiant simultanément ces deux équations.
Le système (S) s'écrit $AX = B$

Théorème : Si A est inversible, alors (S) admet un unique couple solution défini par $X = A^{-1}B$