

1 Suite de matrices

Définition : On dit qu'une suite de matrices colonnes (U_n) est convergente si et seulement si toutes les suites qui la constitue sont convergentes.
 La limite de cette suite est la matrice colonne dont les coefficients sont les limites obtenues.
 Dans tous les autres cas, on dit que la suite est divergente.

Exemple : La suite $U_n = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$ est convergente avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

La suite $V_n = \begin{pmatrix} 2 + \frac{1}{n} \\ n \end{pmatrix}$ est divergente car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

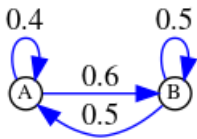
Propriété : Soit une suite de matrices colonnes (U_n) de taille p telle que pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice carrée de taille p.
 Alors pour tout entier naturel n, on a : $U_n = A^n U_0$

Propriété :
 (U_n) est une suite de matrices colonnes de taille p définie par la relation matricielle $U_{n+1} = AU_n + B$ où A est une matrice carrée de taille p et B est une matrice colonne à p lignes.
 Si la suite (U_n) est convergente alors sa limite U est une matrice colonne vérifiant l'égalité $U = AU + B$

voir exercice résolu 2p233

2 Chaînes de Markov

Définition : Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré dont la somme des probabilités issues d'un même sommet est 1.



Définition : La matrice de transition d'une chaîne de Markov est la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient p_{ij} est la probabilité de transition portée par l'arc reliant le sommet i au sommet j s'il existe et 0 sinon.

$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition. La somme de chaque ligne est 1.

Définition : L'état probabiliste après n étapes de la chaîne de Markov est la matrice ligne dont les coefficients sont les probabilités d'arrivée en chaque sommet après n étapes.

Propriété : On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P et dont la matrice ligne des états à l'étape n est q_n
 Pour tout entier naturel n, on a $q_{n+1} = q_n \times P$ et $q_n = q_0 \times P^n$ où q_0 est l'état initial.

Démonstration : Soit A,B,C les états de X_n

$q_n = (a_n \quad b_n \quad c_n)$ la matrice ligne des états de la chaîne de Markov après n étapes.

$$a_{n+1} = P(X_{n+1} = A)$$

$a_{n+1} = P(X_{n+1} = A \cap X_n = A) + P(X_{n+1} = A \cap X_n = B) + P(X_{n+1} = A \cap X_n = C)$ (formule des probabilités totales)

$$a_{n+1} = P_{(X_n=A)}(X_{n+1} = A)P(X_n = A) + P_{(X_n=B)}(X_{n+1} = A)P(X_n = B) + P_{(X_n=C)}(X_{n+1} = A)P(X_n = C)$$

ce qui s'écrit plus simplement

$$a_{n+1} = P_{(X_n=A)}(X_{n+1} = A).a_n + P_{(X_n=B)}(X_{n+1} = A).b_n + P_{(X_n=C)}(X_{n+1} = A).c_n$$

on reconnaît $q_n \times P$

3 Chaînes de Markov et matrices

3.1 Définitions

Définition : On dit qu'une chaîne de Markov de matrice de transition P est convergente si la suite des matrices lignes (π_n) des états de la chaîne de Markov converge.

Définition : Si la suite (π_n) des états d'une chaîne de Markov convergente vérifie $\pi_{n+1} = \pi_n \times P$ alors la limite π de cette suite définit un état stable solution de l'équation $\pi = \pi P$

3.2 Etude d'un exemple

Les clients ont le choix entre des vélos classiques et des vélos électriques.

En 2019, seulement 10% des clients ont loué des vélos électriques.

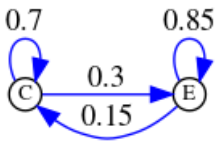
On admet que le nombre de clients reste constant et que tous les clients louent un vélo.

On s'intéresse à la répartition des clients dans les années à venir.

On note c_n la probabilité qu'un client pris au hasard choisisse un vélo classique l'année 2019 + n .

On note e_n la probabilité qu'un client pris au hasard choisisse un vélo électrique l'année 2019 + n

On a le graphe probabiliste suivant :



$M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.15 & 0.85 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition.

$p_0 = (0.9 \quad 0.1)$ correspond à l'état initial.

$$p_1 = p_0 \times M \Leftrightarrow p_1 = (0.9 \quad 0.1) \times \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.15 & 0.85 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p_1 = (0.645 \quad 0.345)$$

Cela signifie qu'en 2021, 64.5% des clients loue un vélo classique et 34.5% un vélo électrique.

L'état stable $\pi = (c \quad e)$ est tel que

$$\pi \times M = \pi$$

$$\Leftrightarrow (c \quad e) \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.15 & 0.85 \end{pmatrix} = (c \quad e)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0.7c + 0.15e = c \\ 0.3c + 0.85e = e \\ e + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{3} \\ e = \frac{2}{3} \end{cases}$$

La limite est donc $\pi = \left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}\right)$

Cela veut dire qu'au bout d'un certain temps il y aura en location $\frac{1}{3}$ de vélos classiques et $\frac{2}{3}$ de vélos électriques.