Fonction logarithme népérien

1 Définition

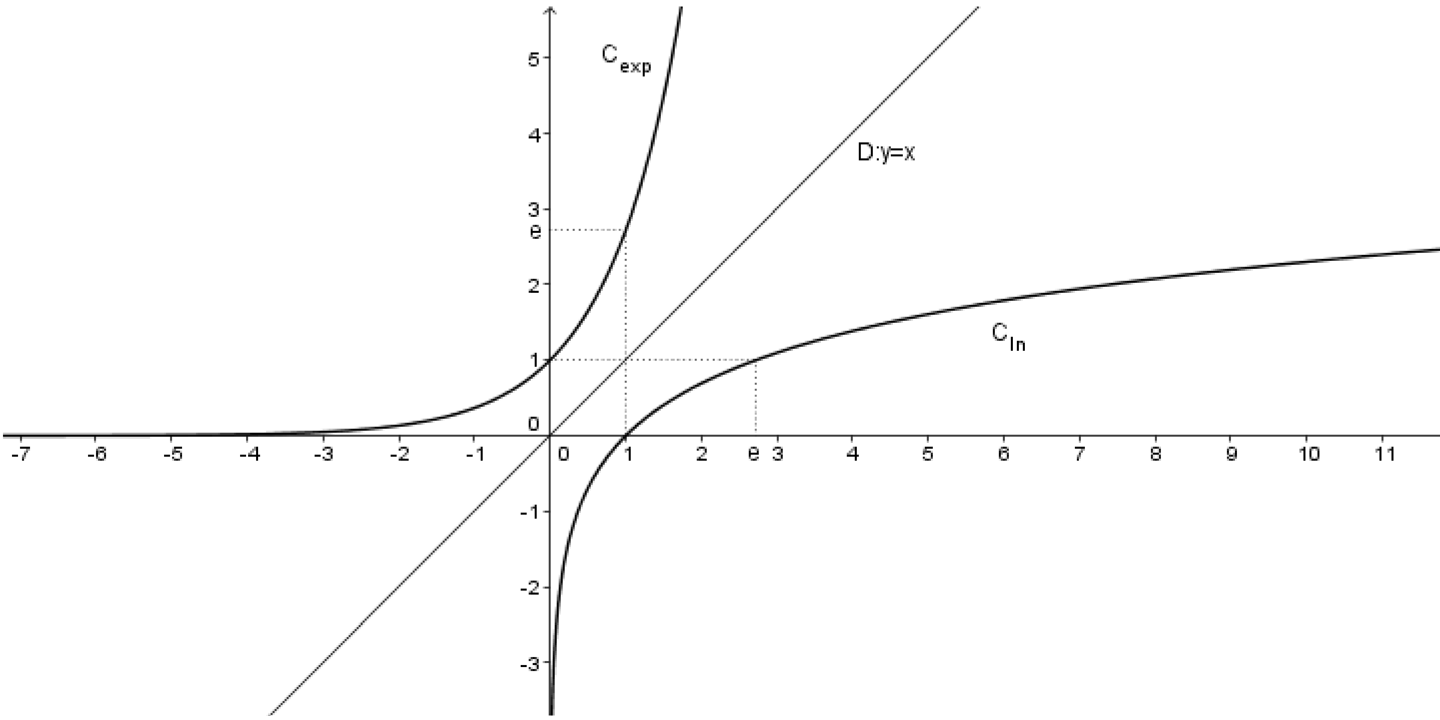
1.1 Définition

On appelle fonction logarithme népérien notée ln la fonction définie sur $]0;+\infty[$ telle que : $x = e^y \Leftrightarrow \ln x = y$
On dit que la fonction ln est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Conséquences :
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$
$\forall x \in]0;+\infty[$, $e^{\ln x} = x$
$\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

1.2 Représentation

Théorème : Les représentations de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



1.3 Variations de la fonction ln

Théorème :
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Démonstration : si $0 < a < b$
$e^{\ln a} < e^{\ln b}$ car $x = e^{\ln x}$pour$x > 0$
$\ln a < \ln b$ car la fonction exp est strictement croissante
donc la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Propriétés : Soit a et b deux réels strictement positifs
$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

2 Propriétés

2.1 Relation fonctionnelle

Théorème :
Pour tous réels a et b strictement positifs,
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Démonstration : $e^{\ln ab} = ab$
$e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b}$
$e^{\ln a + \ln b} = ab$
On a montré que : $e^{\ln ab} = e^{\ln a + \ln b}$
Par la stricte croissance de la fonction exponentielle,cela équivaut à :
$\ln ab = \ln a + \ln b$

2.2 Conséquences

Pour tous réels a et b strictement positifs, on a :

(i) $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$

(ii) $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln b$

(iii) $\ln(a^n) = n \ln a$ $(n \in \mathbb{N})$

(iv) $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

Preuve :
(i) $\left.\begin{array}{r} e^{\ln(\frac{a}{b})} = \frac{a}{b} \\ e^{\ln a - \ln b} = \frac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}} = \frac{a}{b} \end{array}\right\}$ Donc $\ln(\frac{a}{b}) = \ln a - \ln b$
(ii) $\ln(\frac{1}{b}) = \ln 1 - \ln b = -\ln b$
(iii) $\ln(a^n) = \ln(a \times a \times ... \times a) = \ln a + \ln a + ... + \ln a$
(à montrer par récurrence)
(iv) $\ln((\sqrt{a})^2) = 2\ln(\sqrt{a})$
$\Leftrightarrow \ln a = 2\ln(\sqrt{a})$
$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \ln a = \ln(\sqrt{a})$

3 Etude de la fonction ln

3.1 Dérivée

Théorème :
La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Démonstration Changement de variable : $X = \ln x \Leftrightarrow e^X = x$
Posons $A = \ln a \Leftrightarrow e^A = a$
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim\limits_{X \to A} \dfrac{X - A}{e^X - e^A}$
On sait que l'on a : $\lim\limits_{X \to A} \dfrac{e^X - e^A}{X - A} = e^A$
Donc, on a : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} = \dfrac{1}{e^A}$ ce qui s'écrit encore :
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\ln x - \ln a}{x - a} = \dfrac{1}{a}$
Donc la fonction ln est dérivable pour tout entier strictement positif et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

3.2 Limites

Théorème :
(i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ (ii) $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

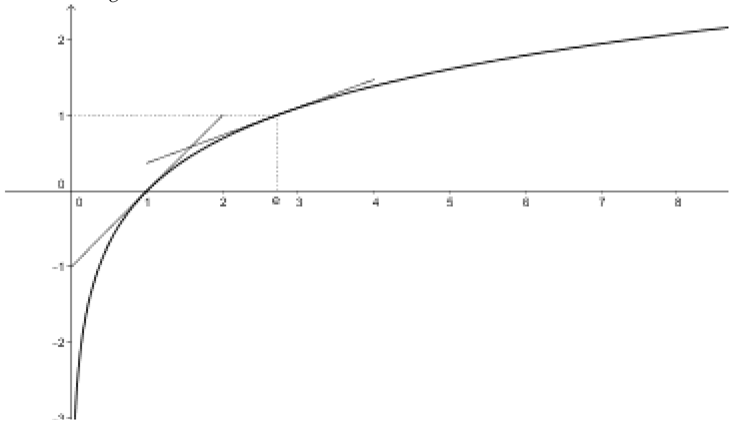
Démonstration : (i) Pour tout $M > 0$,
$\ln x > M \Leftrightarrow e^{\ln x} > e^M$ (exp strictement croissante)
$\Leftrightarrow x > e^M$
Il existe donc un réel $A = e^M$ tel que si $x > A$, $\ln x > M$
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
(ii) Changement de variable : $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{X\to+\infty} \ln\frac{1}{X} = \lim_{X\to+\infty} -\ln X = -\infty$$

3.3 Tableau de variation et courbe

x	0		$+\infty$
$(lnx)'$	$\|$	$+$	
ln	$\|$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

Equation de la tangente au point d'abscisse 1 :
$T_1 : y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$T_1 : y = x - 1$
Equation de la tangente au point d'abscisse e :
$T_e : y = f'(e)(x-e) + f(e)$
$T_e : y = \dfrac{1}{e}x$



3.4 Limites de référence

Théorème : $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$

Démonstration :
Rappel : $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$
En prenant $f = ln$ et $a = 1$ et $x = h$, on obtient :
$\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = 1$

Théorème (Croissances comparées) :
(i) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
(ii) $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

Démonstration :
(i)Changement de variable : $X = \ln x \Leftrightarrow e^X = x$
$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim_{X\to+\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$
(ii) Changement de variable $X = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{X}$
$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X}\ln\dfrac{1}{X} = \lim_{X\to+\infty} \dfrac{-\ln X}{X} = 0$

3.5 Dérivée de ln u

Théorème :
Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur un ensemble D.
La fonction ln u est alors dérivable sur D, et on a :
$(lnu)' = \dfrac{u'}{u}$

Démonstration : $(lnu(x))' = u'(x) \times ln'(u(x)$ $(lnu(x))' = u'(x) \times \dfrac{1}{u(x)}$
Remarque : Les fonctions u et ln u varient dans le même sens.
En effet, comme $u > 0$, $(lnu)'$ et u' sont de même signe.

4 Logarithme décimal

Théorème : On appelle logarithme décimal la fonction notée log, définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

4.1 Application : nombre de chiffres dans l'écriture décimale

Un nombre $N \geq 1$ est nécessairement compris entre deux puissances de 10.
$10^p \leq N < 10^{p+1}$ N possède $p + 1$ chiffres
$\log(10^p) \leq \log N < \log(10^{p+1})$ (fonction croissante)
$p \leq \log N < p + 1$
N possède donc $E(\log N) + 1$ chiffres.
Exemples : Quel est le nombre de chiffres de 123^{123} ?
$E(\log 123^{123}) + 1 = 128$

4.2 Application : en Chimie

L'acidité d'une solution est mesurée par son pH :
pH $= -\log[H^+]$