Intégration

1 Notion d'intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Définition : L' unité d'aire notée u.a. l'aire du rectangle bâti à partir des points O ;I ;J.

Définition : Le domaine sous la courbe est le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ avec $a<b$.
Ce domaine est l'ensemble $\mathscr{D}$ définit comme suit :
$\mathscr{D}=\{M(x;y)/a\leq x\leq b;0\leq y\leq f(x)\}$

Définition : L'intégrale de f sur $[a;b]$
est la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe.
On la note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

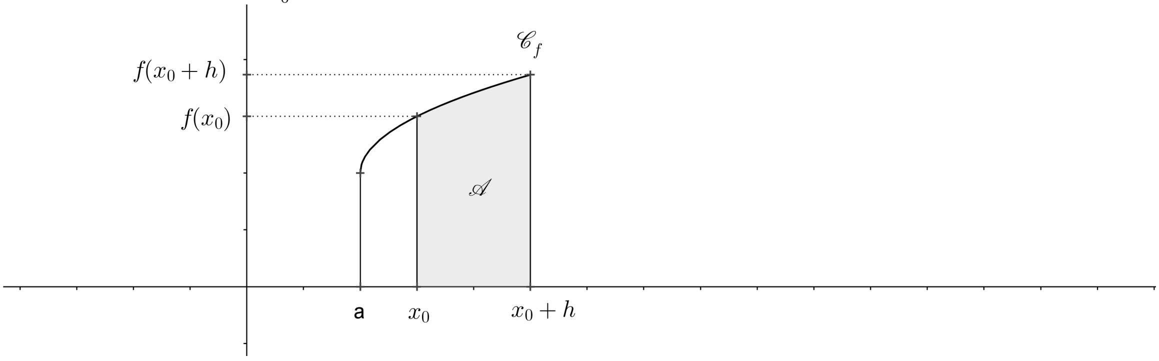
Remarques :
- La variable x est appelée variable muette (elle n'est plus présente à la fin du calcul)
- La variable x peut être remplacée par n'importe quelle lettre.
  on a par exemple : $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$

2 Intégrale d'une fonction continue

Théorème (fondamental) : Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle [a ;b]. La fonction F définie par $F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur l'intervalle [a ;b] et F'=f.

Démonstration (ROC) :
Dans le cas où f croissante sur $[a;b]$
Si $x_0\in[a;b]$, cela revient à montrer que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$

1er cas : $h>0$
$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t$
$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t=\mathscr{A}$



$hf(x_0)\leq\mathscr{A}\leq hf(x_0+h)$
$hf(x_0)\leq F(x_0+h)-F(x_0)\leq hf(x_0+h)$
$f(x_0)\leq\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leq f(x_0+h)$

2ème cas : $h<0$
$f(x_0+h)\leq\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}\leq f(x_0)$
Donc comme f est continue sur, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$
Ainsi par le théorème des gendarmes, on obtient :
$\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$

3 Propriétés de l'intégrale

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I, F est une primitive de f sur I, a et b sont deux nombres quelconques de I. L'intégrale de la fonction f entre a et b est le nombre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

Remarques :

- $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$
- $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

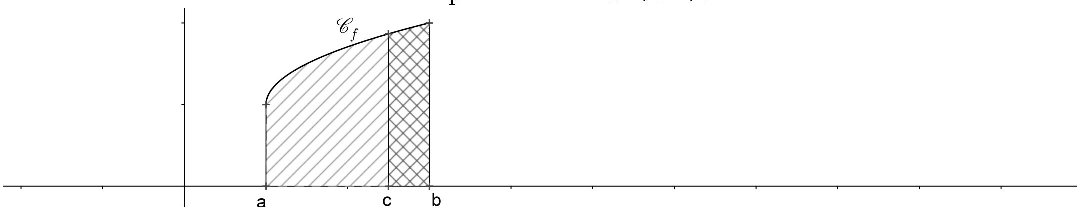
3.1 Linéarité de l'intégration

Théorème : f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle I, λ est un nombre. Pour tous a,b de I
$\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$
$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

3.2 Relation de Chasles

Théorème :f est une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous a,b,c de I $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$

illustration dans le cas d'une fonction positive avec $a < c < b$



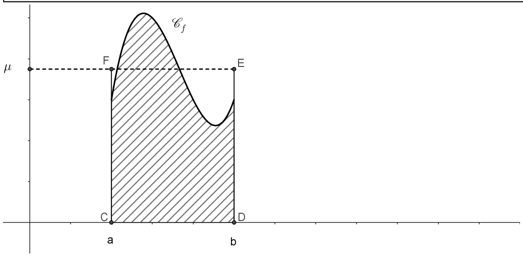
3.3 Positivité et ordre

Théorème : f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I.
a et b sont deux nombres de I tels que $a \leq b$
si $\forall t \in [a;b],\ f(t) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$
si $\forall t \in [a;b],\ f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

4 Valeur moyenne d'une fonction continue

4.1 Définition

définition : f est une fonction continue sur un intervalle [a ;b].
La valeur moyenne de la fonction f sur [a ;b] est le nombre μ défini comme suit :
$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$



μ est la valeur pour laquelle le rectangle CDEF a même aire que l'aire sous la courbe.

4.2 Inégalité de la moyenne

Théorème : f est une fonction continue sur I.
a et b sont deux nombres de I tels que $a < b$
si m et M sont deux nombres tels que $\forall t \in [a;b],\ m \leq f(t) \leq M$ alors :
$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(b-a)$ *inégalité de la moyenne*