

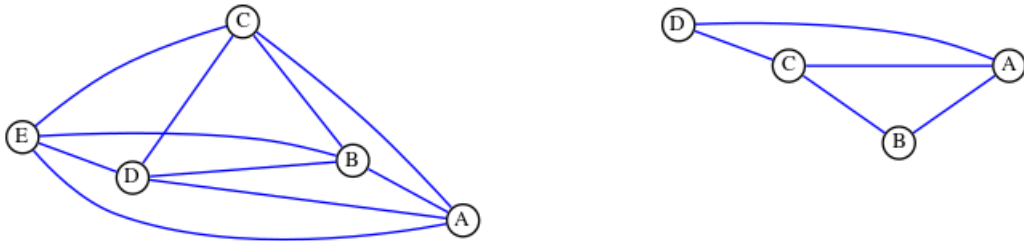
1 Graphes non orientés

1.1 vocabulaire et définitions

Définition : On appelle graphe non orienté un ensemble de sommets reliés par des arêtes.
 ordre du graphe : nombre de sommets
 degré d'un sommet : nombre d'arêtes issues de ce sommet
 Deux sommets reliés par une arête sont adjacents

1.2 graphe complet

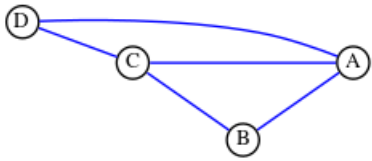
Définition : Un graphe est dit complet si deux sommets quelconques sont adjacents.



1.3 Relation importante

Propriété : La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est le double du nombre d'arêtes.

Remarque : Cette relation est valable dans un graphe simple (sans boucle, au plus une arête entre 2 sommets)

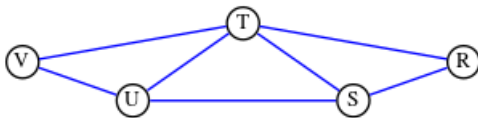


sommet	A	B	C	D
degré	3	2	3	2

La somme des degrés est 10. Il y a 5 arêtes.

1.4 chaîne, cycle

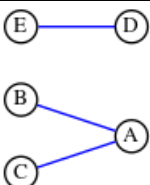
Définition : Dans un graphe non orienté, une chaîne est une succession d'arêtes mises bout à bout.
 La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la compose.
 On dit qu'une chaîne est fermée si ses extrémités coïncident.
 Un cycle est une chaîne fermée dont les arêtes sont toutes distinctes.



- V-U-T-S est une chaîne de longueur 3.
- V-U-S-T-U-V est une chaîne fermée de longueur 5.
- V-U-S-T-V est une cycle de longueur 4.

1.5 graphe connexe

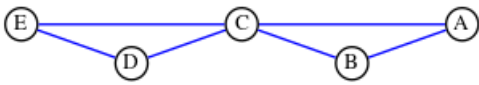
Définition : Un graphe G est dit connexe si chaque couple de sommets est relié par une chaîne.



1.6 chaîne eulérienne

Définitions : Une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient chaque arête du graphe une unique fois.
Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne fermée.

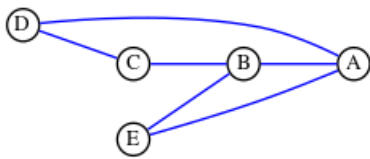
Théorème : Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.



sommet	A	B	C	D	E
degré	2	2	4	2	2

B-A-C-E-D-C-B est un cycle eulérien. (on parcourt chaque arête une et une seule fois même si on repasse plusieurs fois par le même sommet)

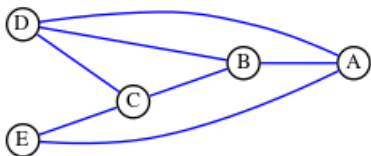
Théorème : Si un graphe connexe possède deux sommets de degré impair, alors, il existe une chaîne eulérienne reliant ces deux sommets.



sommet	A	B	C	D	E
degré	3	3	2	2	2

A-B-C-D-A-E-B est une chaîne eulérienne reliant A et B.

Théorème : Si un graphe a plus de deux sommets de degré impair, il n'y a pas de chaîne eulérienne (et a fortiori pas de cycle).



sommet	A	B	C	D	E
degré	3	3	3	3	2

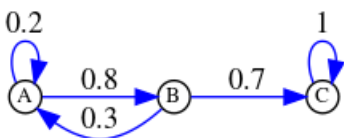
Il n'y a pas de chaîne eulérienne.

2 Graphes orientés

Définition : Un graphe est orienté si ses arêtes, appelées arcs, ont un sens.
Un chemin est une succession d'arcs.

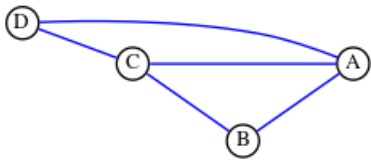
Définition : Un graphe orienté est dit étiqueté si ses arêtes sont assorties d'étiquettes (nombres, mots, symboles...)
Si les étiquettes sont des nombres, on parle de graphe pondéré.

Exemple : graphe pondéré



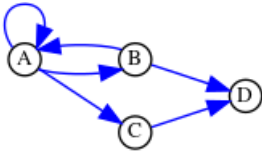
2.1 Matrice d'adjacence associée à un graphe

Définition : Soit un graphe G non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n .
 La matrice d'adjacence associée à G est la matrice carrée de taille n dont chaque terme a_{ij} est le nombre d'arêtes reliant les sommets i et j .



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est toujours symétrique.



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est la matrice d'adjacence associée.

Propriété : Soit une matrice d'adjacence A d'un graphe G non orienté d'ordre p dont les sommets sont numérotés de 1 à p .
 Le nombre de chaînes de longueur n reliant le sommet i au sommet j est le coefficient a_{ij} de la matrice A^n avec $n \in \mathbb{N}^*$

Démonstration au programme (par récurrence) :

- Initialisation : Les chaînes de longueur 1 qui joignent le sommet i au sommet j correspondent au coefficient a_{ij} de la matrice $A = A^1$
- Hérité : (HR) Supposons qu'il existe un entier k tel que le nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j est égal au coefficient $(a_k)_{ij}$ de la matrice A^k .
 Soit un troisième sommet m quelconque Le nombre de chaînes de longueur $k+1$ allant de i à j telles que la première arête soit i - m correspond au nombre de chaînes de longueur 1 allant de i à m multiplié par le nombre de chaînes de longueur k allant de m à j soit :

$$c_m = (a_1)_{im} \times (a_k)_{mj}$$
 Ainsi le nombre de chaînes de longueur $k+1$ qui joignent deux sommets i et j est la somme des termes c_m pour tous les sommets m , soit le coefficient $(a_{k+1})_{ij}$ de la matrice A^{k+1}
 L'hérité est montrée.

Conclusion : La propriété est vraie pour tout entier n