

1 Limite d'une fonction

1.1 Limite finie à l'infini

Définition : Dire qu'une fonction f a pour limite L en $+\infty$, signifie que tout intervalle ouvert contenant L , contient toutes les valeurs de $f(x)$, pour x assez grand, c'est à dire pour x dans un intervalle $]A; +\infty[$

On note alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

Graphiquement : La droite D d'équation $y=L$ est dite asymptote horizontale à la courbe de f .

1.2 Limite infinie à l'infini

Définition : Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand, c'est à dire pour x dans un intervalle $]A; +\infty[$

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

1.3 Limite en un point

1.3.1 limite infinie en un point

Définition : Dire qu'une fonction f a pour limite $+\infty$ en a ($a \in \mathbb{R}$), signifie que tout intervalle $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a .

On note alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$

Graphiquement, la droite d'équation $x = a$ est dite asymptote verticale à la courbe de f .

1.3.2 limite à gauche, limite à droite

Il arrive que le comportement local d'une fonction soit différent "à gauche" et "à droite" de a .

Pour la limite à gauche de a , on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \text{ ou bien } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Pour la limite à droite de a , on note :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \text{ ou bien } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

1.4 Limites des fonctions de référence

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

2 Opérations sur les limites

2.0.1 Somme

$\lim f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim (f+g)(x)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

2.0.2 Produit

$\lim f(x)$	L	$L \neq 0$	0	∞
$\lim g(x)$	L'	∞	∞	∞
$\lim (f \times g)(x)$	$L \times L'$	∞	FI	∞

2.0.3 Quotient

$\lim f(x)$	L	$L \neq 0$	0	L	∞	∞
$\lim g(x)$	$L' \neq 0$	0	0	∞	L'	∞
$\lim \frac{f}{g}(x)$	$\frac{L}{L'}$	∞	FI	0	∞	FI

2.1 Limite d'une fonction composée

Théorème : Soit deux fonctions f et g. Soit a,b,c des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$

Alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$

2.2 Limites et comparaison

2.3 Théorèmes de comparaison

Soit f,g et h sont trois fonctions définies sur l'intervalle $I =]A; +\infty[$ et L un réel.

(*)théorème des gendarmes

Si on a : $\forall x \in I, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = L$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$

(de même en $-\infty$ ou lorsque x tend vers un réel)

(**)théorème de comparaison

Si $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3 Continuité

3.1 Limite finie en un point

f est une fonction définie sur un intervalle I.

a est un nombre qui appartient à I, ou qui est une borne de I.

Dire que la fonction f a pour limite L lorsque x tend vers a signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ prises par les réels x suffisamment proches de a.

3.2 Définition de la continuité

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I. Soit $a \in I$

La fonction f est continue en a signifie que l'on a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

La fonction f est continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point de I.