

Vecteurs, Droites et Plans de l'espace (géométrie 1)

1 Vecteurs de l'espace

1.1 Notion de vecteur de l'espace

Définition : Un vecteur de l'espace est défini par :

- une direction
- un sens
- une norme

1.2 Translation

Définition : Soit \vec{u} un vecteur de l'espace. On appelle translation de vecteur \vec{u} la transformation qui au point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

1.3 Combinaison linéaire de vecteurs de l'espace

Définition : Soit $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et α, β, γ trois réels.

Tout vecteur de la forme $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} .

2 Droites de l'espace

2.1 Vecteurs colinéaires

Définition : Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires signifie qu'ils ont même direction, c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

2.2 Vecteur directeur d'une droite

Définition : On appelle vecteur directeur de d tout vecteur non nul qui possède la même direction que la droite d.

Définition : Soit A un point de l'espace et \vec{u} un vecteur non nul de l'espace. La droite d passant par A et de vecteur directeur \vec{u} est l'ensemble des points M tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires.

Définition : Deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

3 Plans de l'espace

3.1 Direction d'un plan de l'espace

Définition : Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan de l'espace.

3.2 Caractérisation d'un plan de l'espace

Soit un point A et deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} non colinéaires.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par \vec{u} et \vec{v} .

Remarque : Dans ces conditions, le triplet $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan.

Démonstration :

Soit deux points B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

\vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires donc $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan (ABC) . Dans ce repère, tout point M de coordonnées $(x; y)$ est tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

Soit N le point du plan (ABC) de coordonnées $(x; y)$ dans les repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$

Alors on a $\overrightarrow{AN} = x\vec{u} + y\vec{v}$ et donc $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$

donc M et N sont confondus donc M appartient à (ABC)

Remarque : Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

Propriété : Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

Démonstration :

Soit deux plans de repères respectifs $(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $(B; \vec{u}, \vec{v})$

Si P et P' sont confondus c'est évident.

Supposons que P et P' ne sont pas confondus.

Supposons de plus qu'ils ont un point commun M.

Alors il existe $(x; y)$ tq $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

Alors il existe $(x'; y')$ tq $\vec{BM} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$

On obtient $\vec{AB} = (x - x')\vec{u} + (y - y')\vec{v}$

par suite, B appartient à P, donc le repère $(B; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère de P, donc les plans P et P' sont confondus ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Par l'absurde on a démontré que P et P' n'ont aucun point commun et sont donc parallèles.

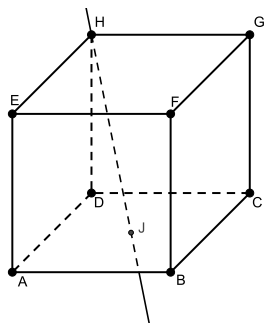
Conséquence : Pour montrer que deux plans sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs non colinéaires de l'un des plans sont colinéaires à deux vecteurs non colinéaires de l'autre.

4 Positions relatives

4.1 Positions relatives de deux droites

Propriété : Deux droites de l'espace peuvent être :

- . coplanaires
 - . sécantes
 - . parallèles
 - . strictement parallèles (aucun point commun)
 - . confondues
- . non coplanaires (elles n'ont alors aucun point commun)

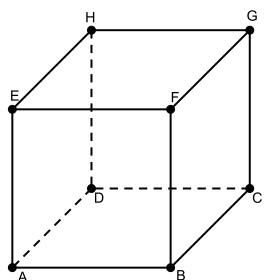


les droites (IH) et (AB) sont non coplanaires
 Les droites (EH) et (BC) sont parallèles donc coplanaires
 Les droites (HJ) et (GJ) sont sécantes donc coplanaires

4.2 Positions relatives de deux plans

Propriété : Deux plans peuvent être :

- . sécants
- . parallèles
 - . strictement parallèles (aucun point commun)
 - . confondus



les plans (ABC) et (AFG) sont sécants.
 $(ABC) \cap (AFG) = (AD)$

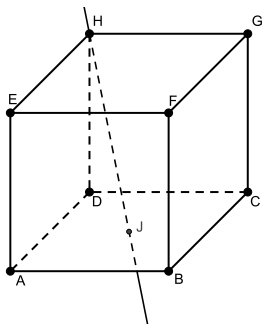
Les droites (ABC) et (EFG) sont strictements parallèles.

Les plans (ABC) et (ABD) sont confondus

4.3 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Propriété : Une droite et un plan sont :

- . sécants
- . parallèles
 - . strictement parallèles (aucun point commun)
 - . la droite est incluse dans le plan.



la droite (JH) et le plan (ABC) sont sécants en J.
 $(ABC) \cap (JH) = \{J\}$

La droite (EG) et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).

5 Bases et repères de l'espace

5.1 Vecteurs coplanaires et bases de l'espace

Définition : Trois vecteurs sont coplanaires s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.

Définition : Trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} de l'espace sont coplanaires s'il existe $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ tq $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$

Propriété : Soit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires.

Pour tout vecteur \vec{u} , il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Démonstration :

Existence : Soit \overrightarrow{AB} un représentant de \vec{u} . Soit P le plan de repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$

Si B appartient à P, alors \overrightarrow{AB} se décompose suivant les vecteurs \vec{i} et \vec{j} .

Supposons que B n'appartient pas à P.

Soit d la droite passant par B de vecteur directeur \vec{k} .

Comme \vec{k} n'est pas colinéaire avec \vec{i} et \vec{j} , la droite d coupe le plan P en un point C. On peut écrire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

\overrightarrow{AC} appartient au plan P donc il existe un couple $(x; y)$ tq $\overrightarrow{AC} = x\vec{i} + y\vec{j}$

\overrightarrow{CB} est colinéaire avec \vec{k} donc il existe un réel z tq $\overrightarrow{CB} = z\vec{k}$

Il existe donc un triplet $(x; y; z)$ tq $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Unicité : Supposons que l'on a deux écritures distinctes

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ et } \vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

$$\text{Alors, } (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$$

Supposons que l'une au moins n'est pas nulle par exemple $(z - z') \neq 0$

on aurait alors : $\frac{x' - x}{z - z'}\vec{i} + \frac{y' - y}{z - z'}\vec{j} = \vec{k}$ ce qui signifierait que les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} seraient coplanaires ce qui est exclu.

Donc les trois différences sont nulles et la décomposition est unique.

Définition : Soit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs de l'espace.

Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé base de l'espace.

5.2 Repère de l'espace

Définition : Soit $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires et soit A un point.

On appelle repère de l'espace le quadruplet $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Remarques : A est l'origine du repère

$\overrightarrow{AM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées du point $M(x; y; z)$

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ donne les coordonnées du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$