

1 Fonction dérivable sur un intervalle

1.1 Dérivées des fonctions usuelles

Définition :
 Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I .
 Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f' .

Exemple 1 : Soit la fonction carrée $f(x) = x^2$
 Soit a un nombre réel quelconque.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a$$

donc f est dérivable en a . (On a pris a un nombre réel quelconque)
 Donc f est dérivable pour tout nombre réel a . On obtient donc la fonction dérivée f' définie comme suit :
 $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$

Exemple 2 : Soit la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$
 Soit a un réel non nul

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-1}{a(a+h)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{a(a+h)} \right) = \frac{-1}{2a^2}$$

donc f est dérivable en a .
 Donc f est dérivable pour tout nombre réel a non nul.
 Pour tout x appartenant à \mathbb{R}^* , $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

De cette manière, on obtient les formules suivantes.

1.2 Formules de dérivation des fonctions usuelles

Df	fonction f	Df'	fonction f'
\mathbb{R}	$f(x) = a, a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$
\mathbb{R}	$f(x) = ax, a \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$f'(x) = a$
\mathbb{R}	$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$
\mathbb{R}	$f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$
\mathbb{R}^*	$f(x) = \frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$]0; +\infty[$	$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

1.3 Opérations sur les fonctions dérivées

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)' = u' + v'$
ku est dérivable sur I , avec $k \in \mathbb{R}$	$(ku)' = ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)' = u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$ est dérivable sur I et $u \neq 0$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $v \neq 0$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

2 Variations d'une fonction

2.1 Signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction

Théorème (admis) :

- La fonction f est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \geq 0$
- La fonction f est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \leq 0$
- La fonction f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) = 0$

2.2 Définitions

Définition :

Le réel M est le maximum de f sur I

s'il existe un réel a tel que $f(a) = M$ et pour tout x de I , $f(x) \leq M$.

On dit alors que le maximum M de f sur I est atteint en a .

Remarque : On peut définir aussi le minimum.

Définition :

- On appelle extremum de f sur I le maximum ou le minimum de f sur I .
- On dit que le réel α est un extremum local de f sur l'intervalle I s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que α soit un extremum de f sur J .

2.3 Extremum d'une fonction

Propriété :

Soit a un réel de I qui n'est pas une borne de I .

- Si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$
- Si la fonction dérivée f' s'annule en changeant de signe de part et d'autre de a , alors f admet un extremum local en a .

