

1 Dérivabilité

1.1 Définitions

1.1.1 Dérivabilité en un point

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a un point de I .
 On dit que la fonction f est dérivable en a lorsque le taux d'accroissement de la fonction f admet une limite finie L en a .
 Dans ce cas, L est appelé le nombre dérivé de f en a , et on le note : $f'(a)$.
 On a alors : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Remarques :

- * Il faut parfois étudier la dérivabilité à droite et à gauche.
- * Autre notation : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

1.1.2 Dérivabilité sur un intervalle

Si une fonction f est dérivable en chaque point d'un intervalle I , on dit que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I .

On note f' la fonction dérivée qui à tout x de I associe son nombre dérivé $f'(x)$

1.1.3 Exemple 1 : la fonction racine carrée

Etude en 0^+

$$t_0(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$t_0(h) = \frac{\sqrt{h}}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} t_0(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} t_0(h) = +\infty$$

Graphiquement tangente verticale)

$x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0

Etude en $a > 0$

$$t_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$t_a(h) = \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} t_a(h) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

La fonction est dérivable pour tout $a > 0$

$$\text{et } f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

CONCLUSION : La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

Sa fonction dérivée est donc la fonction : $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

1.1.4 Exemple 2 : $x \mapsto x^2 + |x|$

Etude en 0 : $t_0(h) = h + \frac{|h|}{h}$ est le taux d'accroissement en 0.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{h \rightarrow 0^+} t_0(h) = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} t_0(h) = -1 \end{array} \right\} \text{ donc la fonction n'est pas dérivable en 0.}$$

Cependant :

f est dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 1$ comme nombre dérivé à droite

f est dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0) = -1$ comme nombre dérivé à gauche.

1.2 Interprétation graphique

Théorème : Si une fonction f est dérivable en a , sa courbe représentative C_f admet en $A(a; f(a))$ une équation d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
 $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.

Remarque : On obtient ainsi une approximation affine lorsque $a + h$ est voisin de a , on a :
 $f(a + h) \approx hf'(a) + f(a)$

1.2.1 Exemple

Soit la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x}$

$T : y = \frac{1}{4}x + 1$ est l'équation de la tangente à C_g au point d'abscisse 4.

Donc pour $a = 4$ et $h = 0.1$, on obtient l'approximation suivante :

$$h(4.03) \approx 0.1 \times 0.25 + 2 = 2.025$$

1.3 Calcul de dérivées

1.3.1 Principales formules

fonction	dérivée
k	0
x^n ($n \in \mathbb{Z}^*$)	nx^{n-1}
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

fonction	dérivée
$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

Toute fonction polynôme est dérivable sur \mathbb{R}

Toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle où elle est définie.

1.3.2 Dérivation d'une fonction composée

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} et g une fonction dérivable en tout réel $f(x)$, avec $x \in I$. La fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout x de I , on a :

$$(g \circ f)'(x) = (g' \circ f)(x) \times f'(x)$$

fonction	dérivée
$(u)^n$ ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$nu'u^{n-1}$
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

2 Continuité

2.1 Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun trou).

2.2 Continuité et dérivabilité

Théorème (admis) :

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a

Si f est dérivable sur un intervalle I , alors f est continue sur cet intervalle I .

Remarque : La réciproque est fausse

2.3 Continuité et résolution d'équations

2.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

il existe un réel $c \in I$, tel que $f(c) = k$

2.3.2 Corollaire

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I=[a;b]$

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

l'équation $f(x) = k$ a une unique solution dans $I = [a; b]$.

2.3.3 Exemple

Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 + x - 1$

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

Donner un encadrement à 10^{-3} de cette solution.

METHODE 1 : balayage

METHODE 2 : Dichotomie

```
def f(x):
    return(x**3+x-1)
a=0
b=1
while b-a>0.001:
    c=(a+b)/2
    if f(a)*f(c)<0:
        b=c
    else:
        a=c
print(a,b)
```

3 Continuité et suites

Propriétés :

Soit f une fonction continue sur I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $L \in I$.

On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(L)$

Théorème du point fixe :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$ et (u_n) la suite définie par le réel $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers L alors L est solution de l'équation $f(x) = x$

4 Convexité

4.1 Caractérisation

Propriétés : Soit f une fonction définie et dérivable deux fois sur I .

f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur $I \Leftrightarrow f''$ positive sur I

f est concave sur $I \Leftrightarrow f'$ est décroissante sur $I \Leftrightarrow f''$ négative sur I

Graphiquement :

f est convexe sur $I \Leftrightarrow \mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes.

f est concave sur $I \Leftrightarrow \mathcal{C}_f$ est en dessous de toutes ses tangentes.

4.2 Point d'inflexion

Propriétés : Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I .

Soit \mathcal{C}_f sa courbe représentative et $a \in I$.

\mathcal{C}_f a un point d'inflexion au point $A(a; f(a)) \Leftrightarrow f'$ change de sens de variation en $a \Leftrightarrow f''$ s'annule et change de signe en a

\mathcal{C}_f a un point d'inflexion au point $A(a; f(a)) \Leftrightarrow f'$ change de sens de variation en $a \Leftrightarrow f''$ s'annule et change de signe en a

Graphiquement : La tangente traverse la courbe en A

