

# 1 Notion de dénombrement sur un ensemble fini

On dira qu'un ensemble  $E$  est fini lorsqu'il admet un nombre fini d'éléments.

Le nombre d'élément de  $E$  est appelé le cardinal. On note  $\text{card}(E)$ .

Dénombrer un ensemble c'est déterminer son cardinal.

Exemple :

$$E = \{1; 5; 13\}, F = \{\sqrt{2}; \pi\}$$

$$\text{card}(E)=3, \text{card}(F)=2$$

## 1.1 Principe additif

Définition : On dit que deux ensembles sont disjoints s'ils n'ont aucun élément en commun.

Exemple :  $E$  et  $F$  sont disjoints.

notation :  $E \cap F = \emptyset$

Propriété : Soit  $E_1, E_2, \dots, E_n$   $n$  ensembles finis deux à deux disjoints.

$$\text{card}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \text{card}(E_1) + \text{card}(E_2) + \dots + \text{card}(E_n)$$

Exemple :  $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) = 5$

## 1.2 Principe multiplicatif

Propriété : Soit  $E_1, E_2, \dots, E_n$   $n$  ensembles finis.

Le produit cartésien  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  est l'ensemble des  $n$ -uplets  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  où  $a_1 \in E_1, a_2 \in E_2, a_n \in E_n$

Remarques :

- un 2-uplet est appelé un couple. Un 3-uplet est appelé un triplet.
- $E^p$  est le produit cartésien de  $p$  ensembles  $E$

Propriété : Soit  $E_1, E_2, \dots, E_n$   $n$  ensembles finis.

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_n)$$

Exemples :  $E \times F = \{(1, \sqrt{2}); (1, \pi); (5, \sqrt{2}); (5, \pi); (13, \sqrt{2}); (13, \pi)\}$

$$\text{card}(E \times F) = 3 \times 2$$

$E \times E = \{(1, 1); (1, 5); (1, 13); (5, 1); (5, 5); (5, 13); (13, 1); (13, 5); (13, 13)\}$

$$\text{card}(E \times E) = 3 \times 3$$

# 2 Arrangements et permutations

## 2.1 factorielle

Propriété : On appelle factorielle  $n$  le nombre noté  $n!$  et défini comme suit :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1$$

Exemple :  $5! = 5.4.3.2.1 = 120$

## 2.2 arrangements

Exemple : Soit  $Z = \{P; U; C; E; L; A\}$

$(P, U)$  est un arrangement à 2 éléments de  $Z$ .

$(U, A, P, C)$  est un arrangement à 4 éléments de  $Z$ .

$(P, U, C)$  et  $(U, C, P)$  sont deux arrangements à 3 éléments distincts car l'ordre a une importance.

Propriété : Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments.

Le nombre d'arrangements à  $p$  éléments de  $E$  est égal à :

$$\frac{n!}{(n - p)!} = n(n - 1) \dots (n - p + 1)$$

## 2.3 permutations

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.  
Une permutation de E est un arrangement à n éléments

Exemple : Anagrames de PUCELA  
Il y a 6 lettres distinctes donc il y a 6! permutations.

## 3 Combinaisons

### 3.1 Définition

Exemple : Considérons l'ensemble Z formé par : Alberto, Beatriz, Celia, Delphine, Emanuel.  $Z = \{A; B; C; D; E\}$   
 $\{A; B; C\}$  et  $\{B; D; E\}$  sont deux sous-ensembles à 3 éléments. J'aimerais savoir combien de sous-ensembles de 3 personnes différentes je peux former.

Définition : Soit E un ensemble à n éléments et p un entier tel que  $p \leq n$ .  
Une combinaison de p éléments de E est un sous ensemble de p éléments de E.

Définition : Le nombre de combinaisons de p éléments de E est noté  $\binom{n}{p}$

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple :  $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$

On peut former 10 sous-ensembles de 3 personnes.

### 3.2 Coefficients binomiaux

Propriété : pour tout entier  $n \geq 1$  et tout entier p tel que  $0 \leq p \leq n - 1$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Démonstration à connaître :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{(n)!}{(n-p-1)!(p+1)!}$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p-1)!(n-p)} + \frac{n!}{(n-p-1)!p!(p+1)}$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \left[ \frac{1}{n-p} + \frac{1}{p+1} \right]$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{n!}{p!(n-p-1)!} \frac{(n+1)}{(n-p)(p+1)}$$

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!}$$

Propriété : Soit E un ensemble à n éléments.  
Il y a  $2^n$  sous ensembles de E.

preuve :

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Propriétés : Pour tout entier n

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{1} = n$$

Propriété de symétrie : Pour tout entier naturel  $k$  tel que  $k \in \{0; \dots; n\}$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Propriété : Pour tout entier naturel  $k$  tel que  $k \in \{0; \dots; n\}$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Triangle de Pascal

	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						