

1 Variables aléatoires

1.1 Espérance

Propriétés :
 Soit X et Y deux variables aléatoires
 $E(aX) = aE(X)$ avec $a \in \mathbb{R}$
 $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

1.2 Variance

Propriétés :
 Soit X et Y deux variables aléatoires
 $V(aX) = a^2V(X)$ avec $a \in \mathbb{R}$
 Si X et Y sont indépendantes alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

1.3 Combinaison linéaire

Propriété :
 Soit X et Y deux variables aléatoires
 $E(aX + b) = aE(X) + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
 $V(aX + b) = a^2V(X)$

1.4 Echantillon

Définition : Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste de n variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.

1.5 Somme d'un échantillon

Définition :
 Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.
 On pose $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ qui est la variable aléatoire somme. On a alors :
 $E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$
 $V(S_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$

1.6 Moyenne d'un échantillon

Définition :
 Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.
 La variable aléatoire moyenne M_n de l'échantillon est donnée par :

$$M_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

Propriété : Soit une variable aléatoire X et soit un échantillon (X_1, X_2, \dots, X_n) de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X.
 $E(M_n) = E(X)$ $V(M_n) = \frac{1}{n}V(X)$

2 Inégalités de concentration

2.1 Inégalité de Markov

Propriété : Soit X une variable aléatoire à valeurs positives. Pour tout réel strictement positif a , on a :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Interprétation : Plus a est grand, plus la probabilité que X prenne des valeurs plus grandes que a est faible.

preuve : Supposons que X prend n valeurs

$$E(X) = \sum_{x_i} x_i P(X = x_i) \text{ ce qui donne : } E(X) = \sum_{x_i \geq a} x_i P(X = x_i) + \sum_{x_i < a} x_i P(X = x_i)$$

X prend des valeurs positives donc on a : $\sum_{x_i < \alpha} x_i P(X = x_i) \geq 0$

On obtient donc : $E(X) \geq \sum_{x_i \geq \alpha} x_i P(X = x_i)$ puis $E(X) \geq \sum_{x_i \geq \alpha} x_i P(X = x_i) \geq \sum_{x_i \geq \alpha} \alpha P(X = x_i)$

$E(X) \geq \alpha \sum_{x_i \geq \alpha} P(X = x_i)$ et donc $E(X) \geq \alpha P(X \geq \alpha)$

2.2 Inégalité de Bienaimé-Tchebychev

Propriété : Soit une variable aléatoire X. Pour tout réel strictement positif α , on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

Interprétation : La probabilité de s'écarter de l'espérance à droite ou à gauche de plus de δ est d'autant plus faible que δ est grand.

preuve : $\alpha > 0$ donc $|X - E(X)| \geq \alpha \Leftrightarrow |X - E(X)|^2 \geq \alpha^2$

L'inégalité de Markov appliquée à la variable $|X - E(X)|^2$ nous donne :

$$P(|X - E(X)|^2 \geq \alpha^2) \leq \frac{E(|X - E(X)|^2)}{\alpha^2}$$

$$P(|X - E(X)|^2 \geq \alpha^2) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

3 Loi (faible) des grands nombres

Propriété : Soit la variable aléatoire M_n d'un échantillon de taille n de la variable aléatoire X.

Pour tout réel strictement positif ϵ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| > \epsilon) = 0$$

Interprétation : Plus la taille de l'échantillon est grande, plus l'écart entre la moyenne de cet échantillon et l'espérance de la variable aléatoire X est faible.

preuve : $E(M_n) = E(X)$ par la linéarité de l'espérance

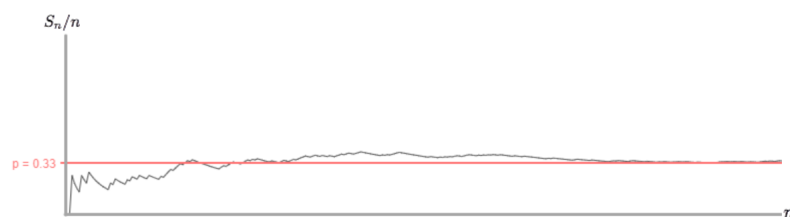
Par Bienaimé-Tchebicheff, on a : $P(|M_n - E(M_n)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(M_n)}{\epsilon^2}$

$$V(M_n) = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n^2} = \frac{V(X)}{n} \text{ d'où on obtient : } P(|M_n - E(M_n)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{n\epsilon^2}$$

La suite $\left(\frac{V(X)}{n\epsilon^2}\right)$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

d'où la loi (faible) des grands nombres : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| > \epsilon) = 0$

EXEMPLE GRAPHIQUE : <https://experiences.math.cnrs.fr/Illustration-de-la-loi-des-grands-95.html>



Lois

Bernoulli

Exponentielle

Cauchy

Nombre de tirages (n)

299

Nombre de réalisations

1

p

0.33

Recalculer les réalisations

Coloriser