

1 Applications des nombres complexes

1.1 distances

Soit A(a) et B(b) deux points distincts du plan :
On a $AB = |b - a|$

1.2 angles

Soit A(a) B(b) C(c) trois points distincts.
(i) $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a)$
(ii) $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right)$

Démonstration (ii) :

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{AC})$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg(c - a) - \arg(b - a)$$

$$(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right)$$

2 Racine nième de l'unité

2.1 Détermination de l'ensemble \mathbb{U}_n

Définition : Une racine nième de l'unité est un nombre complexe vérifiant $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème : L'ensemble \mathbb{U}_n des racines de l'unité possède exactement n racines :
 $W_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$

Démonstration :

Existence : Si $z = 1$ alors $|z|^n = |z^n| = 1$ et donc $|z| = 1$ On cherche les nombres $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi[$

$$z^n = 1 \Leftrightarrow (e^{i\theta})^n = 1 \Leftrightarrow e^{im\theta} = 1 \Leftrightarrow n\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$W_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad k \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$$

Unicité : Supposons qu'il existe $k' \in \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$ tel que $W_k = W_{k'}$

$$e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$$

$$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2m\pi \text{ avec } m \in \mathbb{Z}$$

$$k = k' + mn$$

$$k - k' = mn \text{ ie } n \text{ divise } (k - k')$$

Or $(k - k')$ est un entier relatif appartenant à $\llbracket -n + 1; n - 1 \rrbracket$

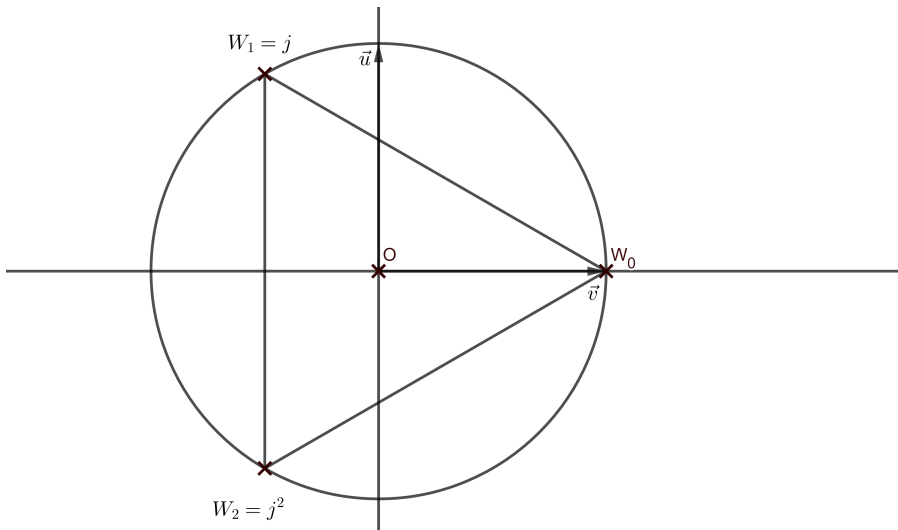
n non nul ne peut diviser k-k'

donc $l = 0$ et $k - k' = 0$ ou encore $k = k'$

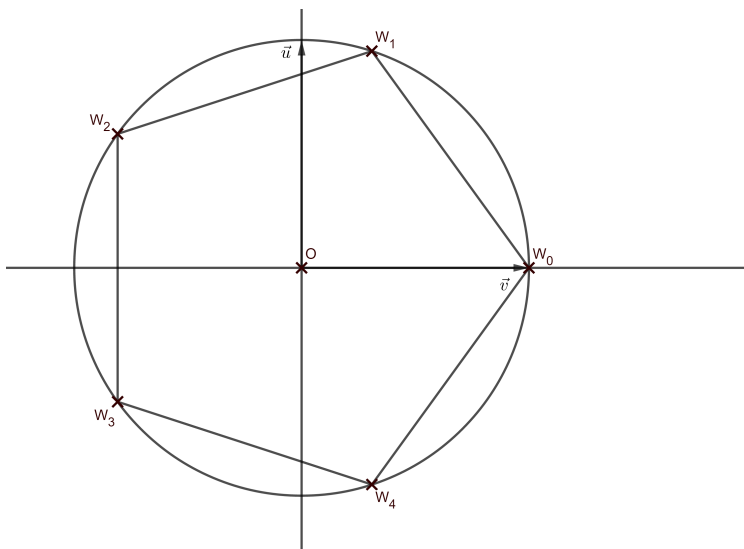
on a montré l'unicité.

2.2 Représentation géométrique

2.2.1 $n = 3$



2.2.2 $n = 5$



2.2.3 $n = 6$

