1 Equations du deuxième degré dans $\mathbb{C}$

Théorème : Toute équation du second degré dans $\mathbb{C}$ admet toujours deux solutions distinctes ou confondues.
Si cette équation est à coefficients réels, c'est à dire $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Elle admet dans $\mathbb{C}$:

- si $\Delta > 0$ deux solutions réelles distinctes $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- si $\Delta = 0$ une solution double réelle $z_0 = \frac{-b}{2a}$
- si $\Delta < 0$ deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ avec $z_2 = \overline{z_1}$

Démonstration : On utilise la forme canonique $az^2 + bz + c = a[(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]$

comme $a \neq 0$, résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation, c'est résoudre $(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

si $\Delta \geq 0$, alors deux solutions réelles distinctes ou confondues.

si $\Delta < 0$ alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$

$(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = (z + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a})^2 = (z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a})(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a})$

Propriété :
Soit un polynome du deuxième degré de la forme $az^2 + bz + c$
dont S la somme des racines et P le produit des racines.
on a les relations : $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$

2 Factorisation des polynomes dans $\mathbb{C}$

2.1 polynôme

Définition : Une fonction polynome P est une fonction de la forme $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$

Propriété : Un polynôme est nul si et seulement si tous les coefficients sont nuls.

2.2 racine d'un polynôme

Définition : Soit un polynôme P. Soit α un nombre complexe.
$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ est une racine de P.

Théorème : Soit un polynôme P défini par $P(z) = z^n - \alpha^n$ où $n \geq 2$ est un entier.
Alors, P est factorisable par $(z - \alpha)$ c'est à dire qu' il existe un polynôme Q de degré n-1 tel que $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$

Démonstration :

- Si $\alpha = 0$ trivial
- Si $\alpha = 1$, on a :
  $z(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1) = z^n + z^{n-1} + ... + z^2 + z$ (A)

  $(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1) = z^{n-1} + z^{n-2} ... + z^2 + z + 1$ (B)

  Par soustraction de (A) par (B) $(z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + ... + z + 1) = z^n - 1$ (C)

- Si $\alpha \neq 0$ Dans l'égalité (C) remplaçons z par $\frac{z}{\alpha}$

  $$(\tfrac{z}{\alpha} - 1)\left(\frac{z^{n-1}}{\alpha^{n-1}} + \frac{z^{n-2}}{\alpha^{n-2}} + ... + \frac{z}{\alpha} + 1\right) = \left(\frac{z}{\alpha}\right)^n - 1$$

  On multiplie par a^n et on obtient :

  $$(z - \alpha)\left(z^{n-1} + \alpha z^{n-2} + ... + \alpha^{n-2} z + \alpha^{n-1}\right) = z^n - \alpha^n$$

Théorème : Soit P un polynôme de degré n.
P est factorisable par $(z - \alpha)$ si et seulement si α est une racine de P

Démonstration : Comme α est une racine, on a $P(\alpha) = 0$ d'où :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 - P(\alpha)$$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0 - (a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + ... + a_1 \alpha + a_0)$$

$$P(z) = a_n (z^n - \alpha^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - \alpha^{n-1}) + ... + a_1(z - \alpha)$$

D'après le théorème précédent on sait que pour tout k,il existe un polynôme Q_k de degré k-1 tel que :

$$P(z) = a_n (z - \alpha) Q_{n-1}(z) + a_{n-1}(z - \alpha) Q_{n-2}(z) + ... a_1 (z - \alpha) Q_0(z)$$

$$P(z) = (z - \alpha)\left[a_n Q_{n-1}(z) + a_{n-1} Q_{n-2}(z) + ... a_1 Q_0(z)\right]$$

Donc il existe un polynòme de degré n-1 tel que $P(z) = (z - \alpha) Q(z)$ et donc $P(z)$ est factorisable par $(z - \alpha)$.

Théorème : Un polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes.