

# 1 Trigonométrie

## 1.1 Formules d'addition

(i) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	(iii) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
(ii) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	(iv) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Démonstration :

(i) On considère un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  et le cercle trigonométrique.

$(\vec{i}; \vec{u}) = a$  et  $(\vec{i}; \vec{v}) = b$

On a donc :  $\vec{u} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix}$

Ce qui donne :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$  (\*)

De plus :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}; \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(b - a)$

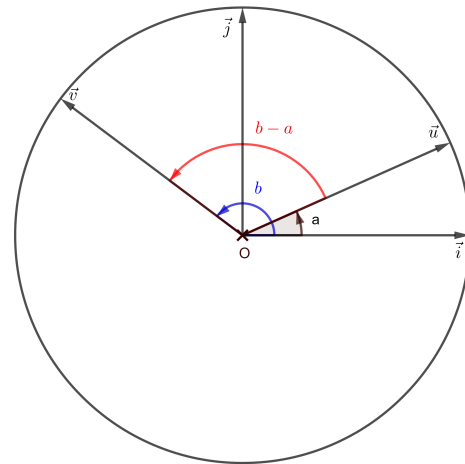
1.1.  $\cos(b - a) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(a - b)$  (\*\*)

Finalement  $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(ii)

$\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$



(iii)  $\sin(a - b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right)$

$\sin(a - b) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right)$

$\sin(a - b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b$

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

(iv)  $\sin(a + b) = \sin(a - (-b))$

$\sin(a + b) = \sin a \cos(-b) - \cos a \sin(-b)$

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

## 1.2 Formules de duplication

Propriétés : Soit  $a \in \mathbb{R}$

$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$	$\sin(2a) = 2 \cos a \sin a$
$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1$	
$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a$	

Démonstration : on utilise les formules d'additions

$\cos(2a) = \cos(a + a) = \dots$

# 2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

## 2.1 Définition

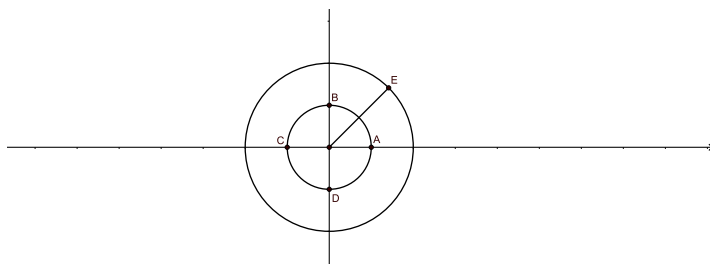
Définition : Pour tout réel  $\theta$ , on pose :  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Cette notation exponentielle est justifiée par l'égalité suivante :

$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$

On a la même relation fonctionnelle  $f(a) \times f(b) = f(a + b)$  que pour la fonction exponentielle.

On appelle forme exponentielle d'un nombre complexe  $z \neq 0$  la forme  $z = Re^{i\theta}$  avec  $R = |z|$  et  $\theta = \arg z [2\pi]$



$A(e^{i0}); B(e^{i\frac{\pi}{2}}); C(e^{i\pi}); D(e^{-i\frac{\pi}{2}}); E(2e^{i\frac{\pi}{4}})$

En particulier, lorsque  $\theta = \pi$ , on a :

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Cette dernière égalité (égalité d'Euler) est une des plus célèbres formules mathématiques.

## 2.2 propriétés

Théorème : Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$

$$(i) e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$$

$$(iii) \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$$

$$(ii) \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$(iv) \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

## 2.3 Formule de Moivre

Théorème : Pour tout réel  $\theta$  et tout entier naturel  $n$  non nul :

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ ce qui peut s'écrire } (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Application : Exprimer  $\sin 3x$  en fonction de  $\sin x$

## 2.4 Formule d'Euler

Théorème : Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Application : Déterminer une primitive de la fonction  $f(x) = (\cos x)^3$

$$(\cos x)^3 = \left( \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3$$

$$(\cos x)^3 = \frac{1}{8} ((e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}))$$

$$(\cos x)^3 = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3\cos x)$$

On vient de linéariser  $(\cos^3 x)$  et il est désormais possible de trouver des primitives. F en est une.

$$F(x) = \frac{1}{12} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$$