

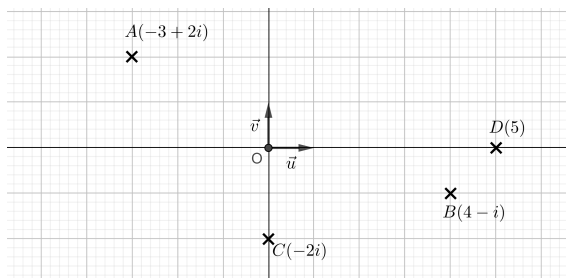
1 Représentation de la forme algébrique

1.1 Affixe d'un point

Théorème :

A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut faire correspondre un point $M(a;b)$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. z est appelé affixe de M . On note $M(z)$

Réciproquement, à tout point $M(x; y)$ dans le plan muni d'un repère orthonormal, on peut associer un nombre complexe $z = x + iy$



le milieu K de $[AB]$ a pour affixe $\frac{-3 + 2i + 4 - i}{2}$.
d'où $K(0.5 + 0.5i)$

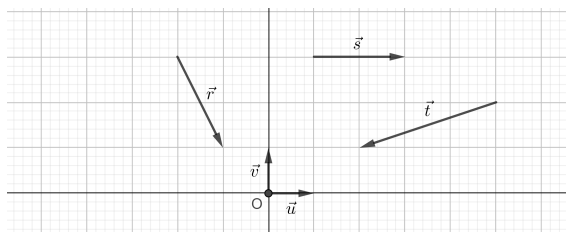
Propriété : Soit $A(z_A)$ et $B(z_B)$

Le milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$

1.2 Affixe d'un vecteur

Définition : A tout nombre complexe $z = x + iy$ on associe le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

z est l'affixe du vecteur \vec{u} et le vecteur \vec{u} est le vecteur image du nombre complexe z .

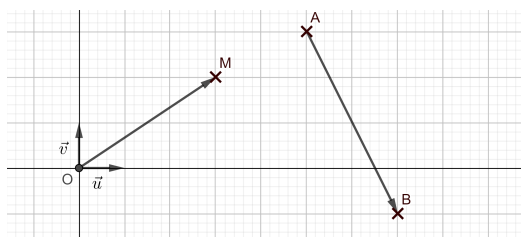


$\vec{r}(1 - 2i)$
 $\vec{s}(2)$
 $\vec{t}(-3 - i)$

1.3 Relation entre point et vecteur

Propriété : Soit le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$

Le point M a pour affixe $z \Leftrightarrow$ Le vecteur \overrightarrow{OM} a pour affixe z



$M(3 + 2i)$
 $\overrightarrow{OM}(3 + 2i)$
 $A(5 + 3i)$ et $B(7 - i)$
 $\overrightarrow{AB}(2 - 4i)$

Propriété : Soit le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, $A(z_A)$ et $B(z_B)$

Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A$

2 Module et argument

2.1 Module

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$

Le module de z est le nombre positif noté $|z|$ et défini comme suit :

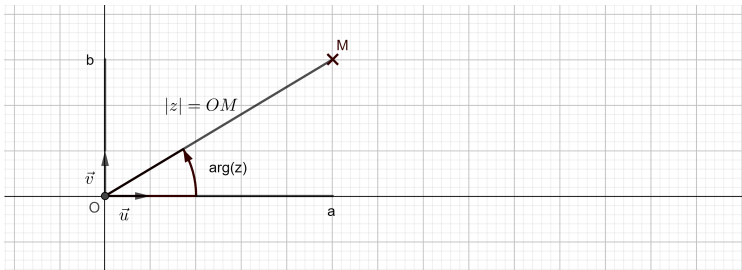
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2.2 Argument

Définition : Soit le point M d'affixe z non nulle.

L'argument de z , noté $\arg(z)$ est une mesure (en radians) de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

2.3 Graphiquement



2.4 Propriétés

Propriétés : Pour tout complexe z non nul.

$$|-z| = |z|$$

$$\arg(-z) = \arg(z) + \pi[2\pi]$$

$$|\bar{z}| = |z|$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$$

Propriétés : Soit $z \in \mathbb{C}^*$

z est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi]$

z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$

3 Forme trigonométrique et représentation associée

Définition : On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z ($z \neq 0$) dont l'écriture algébrique est $a + ib$, l'écriture suivante $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta \equiv \arg(z) \pmod{2\pi}$

Théorème : Pour tous nombres complexes z et z' non nuls et n entier naturel non nul.

$$(1) |z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$(5) \arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')[2\pi]$$

$$(2) |z^n| = |z|^n$$

$$(6) \arg(z^n) = n\arg(z)[2\pi]$$

$$(3) \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

$$(7) \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$$

$$(4) \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

$$(8) \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$$

Démonstration :

* (1) et (5) Soit $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$
 $zz' = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)|z'|(\cos \theta' + i \sin \theta')$

$$zz' = |z||z'|(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \cos \theta' + \sin \theta' \cos \theta)$$

$$zz' = |z||z'|(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$$

* par récurrence

initialisation : $n = 1$ évident

hérédité : Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $|z^k| = |k|^k$

$$|z^{k+1}| = |z^k \cdot z|$$

$$|z^{k+1}| = |z^k| |z|$$

$$|z^{k+1}| = |z|^k |z| \text{ on utilise (HR)}$$

$$|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$$

l'hérédité est démontrée.

4 Ensemble \mathbb{U}

4.1 Définitions

\mathbb{U} est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe de \mathbb{U} .

On a donc $a^2 + b^2 = 1$

4.2 Stabilité

Propriété : \mathbb{U} est stable par multiplication et par le passage à l'inverse

Démonstration :

* Soit $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U}$ $|z \times z'| = |z| \times |z'|$

$$|z \times z'| = 1 \times 1 = 1$$

donc on a : $zz' \in \mathbb{U}$

\mathbb{U} est stable par produit.

* $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$

$$|\frac{1}{z}| = \frac{1}{1} = 1$$

\mathbb{U} est stable par passage à l'inverse.