

1 L'ensemble \mathbb{C}

1.1 Définition

Définition : On appelle ensemble des nombres complexes, noté \mathbb{C} l'ensemble des nombres z de la forme $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et avec $i^2 = -1$.

Remarques :

- Le nombre réel a s'appelle la partie réelle de z . On note $a = Re(z)$.
- Le nombre réel b s'appelle la partie imaginaire de z . On note $b = Im(z)$.
- Cette forme $z = a + ib$ est appelée la forme algébrique.
- Tout nombre réel appartient à \mathbb{C} , donc dans ce cas $b = 0$.
- Si $a = 0$, on dit que z est un imaginaire pur.

Théorème : Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et la même partie imaginaire.

1.2 Opérations + et x

On définit deux opérations
 L'addition : $z + z' = (a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$
 La multiplication : $z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba')$

Remarque : $a + ib = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$

1.3 Division

Propriété : Tout nombre complexe z non nul admet un inverse noté $\frac{1}{z}$

Exemple : Donner la forme algébrique de l'inverse de $z = 3 + i$
 technique : On multiplie par le conjugué.

$$\frac{1}{3 + 2i} = \frac{(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)}$$

$$\frac{1}{3 + 2i} = \frac{3 - 2i}{13}$$

$$\frac{1}{3 + 2i} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$

2 Conjugué

Définition : Soit z un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$.
 On appelle conjugué de z , le nombre noté \bar{z} tel que :
 $\bar{z} = a - ib$

Propriété : $z\bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

preuve :

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib)$$

$$z\bar{z} = a^2 - (ib)^2$$

$$z\bar{z} = a^2 - i^2b^2$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2$$

Propriétés :

Soit z un nombre complexe et \bar{z} son conjugué.

(i) $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$

(ii) $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

(iii) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$

(iv) z est un réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$

Démonstration :

(i) $z + \bar{z} = a + ib + a - ib$

$z + \bar{z} = 2a$

$z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$

(ii) $z - \bar{z} = a + ib - a + ib$

$z - \bar{z} = 2ib$

$z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$

(iii) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 0$ (d'après (i))

(iv) z est un réel $\Leftrightarrow \text{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$ (d'après (ii))

Propriétés : Pour tous nombres complexes z et z' , on a :

a) $\overline{\bar{z}} = z$

c) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

e) si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

b) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = (\bar{z})^n$

f) si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$

Démonstration :

a) $\overline{a + ib} = a - ib = a + ib$

b) $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'}$

$\overline{z + z'} = a + a' - i(b + b')$

$\overline{z + z'} = a - ib + a' - ib'$

$\overline{z + z'} = a + ib + a' + ib'$

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

c)

$$\begin{aligned} \overline{z \times z'} &= \overline{(a + ib) \times (a' + ib')} \\ \overline{z \times z'} &= \overline{aa' + iab' + iba' + i^2bb'} \\ \overline{z \times z'} &= aa' - bb' - i(ab' + ba') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{z} \times \bar{z}' &= \overline{a + ib} \times \overline{a' + ib'} \\ \bar{z} \times \bar{z}' &= (a - ib) \times (a' - ib') \\ \bar{z} \times \bar{z}' &= aa' - bb' - i(ab' + ba') \end{aligned}$$

donc : $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$

d) Par récurrence

Initialisation : pour $n=1$, c'est évident.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que l'on ait : $\overline{z^k} = \bar{z}^k$

$\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z}$

$\overline{z^{k+1}} = \bar{z}^k \times \bar{z}$ d'après c)

$\overline{z^{k+1}} = \bar{z}^k \times \bar{z}$ d'après l'hypothèse de récurrence

$\overline{z^{k+1}} = \bar{z}^{k+1}$

L'hérédité est montrée

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = (\bar{z})^n$

e)

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a + ib}\right)}$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)}\right)}$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i$

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a - ib}$

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{(a + ib)}{(a - ib)(a + ib)}$

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2}i$

donc on a : $z \neq 0, \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

$$f) \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\bar{z}'} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$$

3 Binôme de Newton

3.1 Formule

Théorème : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Démonstration par récurrence :

Initialisation : Pour $n = 0$ $(a + b)^0 = 1$ et $\binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ donc la formule est vraie pour $n = 0$

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier p tel que :

$$(a + b)^p = \binom{p}{0} a^p + \binom{p-1}{1} a^{p-1} b + \dots + \binom{p}{p-1} a b^{p-1} + \binom{p}{p} a b^p$$

$$(a + b)^{p+1} = (a + b)(a + b)^p$$

$$(a + b)^{p+1} = (a + b) \left[\binom{p}{0} a^p + \binom{p-1}{1} a^{p-1} b + \dots + \binom{p}{p-1} a b^{p-1} + \binom{p}{p} a b^p \right]$$

$$(a + b)^{p+1} = \binom{p}{0} a^{p+1} + \left[\binom{p}{1} + \binom{p}{0} \right] a^p b + \dots + \left[\binom{p}{p} + \binom{p}{p-1} \right] a b^p + \binom{p}{p} b^{p+1}$$

$$(a + b)^{p+1} = \binom{p+1}{0} a^{p+1} + \binom{p+1}{1} a^p b + \dots + \binom{p+1}{p} a b^p + \binom{p+1}{p+1} b^{p+1}$$

L'hérédité est montrée.

3.2 Exemple

Pour les coefficients binomiaux, il faut utiliser le triangle de Pascal.

	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$