

1 Equation cartésienne d'une droite

1.1 Vecteur directeur

Définition : On appelle vecteur directeur d'une droite (AB) tout vecteur colinéaire au vecteur \overrightarrow{AB} .

1.2 Equation cartésienne

Théorème : Dans un repère orthonormé, les coordonnées de l'ensemble $M(x, y)$ d'une droite (d) vérifient la relation :

$ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels.

Cette relation est l'équation cartésienne de la droite (d)

$\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d)

2 Equation réduite

2.1 Définition

Soit une droite (d) de coefficient directeur m, il existe un unique nombre p tel que l'équation de (d) s'écrive $y = mx + p$

Cette relation s'appelle l'équation réduite de la droite (d)

Remarque : Une droite a une infinité d'équations cartésiennes mais une seule équation réduite.

2.2 Passage de l'équation cartésienne à l'équation réduite

Soit une droite (d) d'équation cartésienne $2x - 3y + 5 = 0$

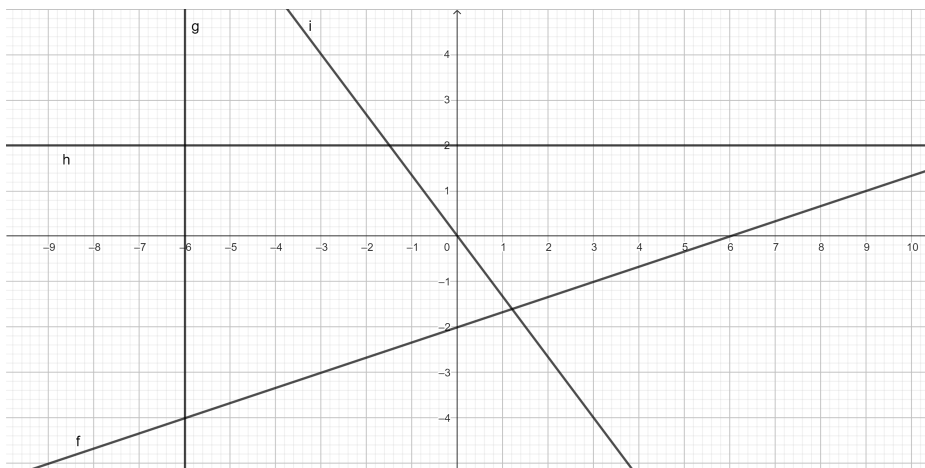
On obtient en isolant y : $3y = 2x + 5$

Puis après division : $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

$-4x + 6y - 10 = 0$ est une autre équation cartésienne de la droite (d).

On obtient alors $6y = 10 + 4x$ puis $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ donc la même équation réduite.

2.3 Exemples



$(f) : y = \frac{1}{3}x - 2$

$(g) : x = -6$

$(h) : y = 2$

$(i) : y = -\frac{4}{3}x$

3 Systèmes d'équations

3.1 Méthode de la substitution

Il est judicieux d'appliquer cette méthode quand une des deux inconnues est de coefficient 1 ou -1 comme c'est le cas ici pour y dans la deuxième équation.

On isole alors y et on l'exprime en fonction de x . C'est ce qui est fait dans le deuxième système.

Ensuite, dans le troisième système, on a remplacé y par son expression en fonction de x et on a ainsi supprimé la variable y . On se retrouve avec une équation du premier degré.

Une fois qu'on connaît x on peut facilement calculer y .

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ y = 11 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3(11 - 5x) = 1 \\ y = 11 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17x = 34 \\ y = 11 - 5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(2; 1)\}$$

3.2 Méthode de la combinaison linéaire

On cherche là aussi à éliminer une des deux inconnues. On va éliminer l'inconnue y en multipliant la première équation par 3 et la deuxième par 5 dans le deuxième système. Dans la deuxième équation du troisième système, on a tout additionné, ce qui permet d'éliminer l'inconnue y . Une fois x connue, il est aisé de calculer y .

$$\begin{cases} 3x - 5y = 21 \\ 4x + 3y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 15y = 63 \\ 20x + 15y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 21 \\ 9x + 20x = 63 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y = 21 \\ 29x = 58 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$S = \{(2; -3)\}$$

4 Positions relatives de deux droites

4.1 Droites sécantes

Théorème :

La droite $(d) : ax + by + c = 0$ et la droite $(d') : a'x + b'y + c' = 0$ sont sécantes si et seulement si leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

C'est équivalent à $\det(\vec{u}, \vec{u}') \neq 0 \Leftrightarrow ab' - a'b \neq 0$

Lorsque les deux droites sont sécantes, les coordonnées (X, Y) du point d'intersection sont solution du système :

$$\begin{cases} aX + bY + c = 0 \\ a'X + b'Y + c' = 0 \end{cases}$$

4.2 Droites parallèles

Théorème : Les droites $(d) : ax + by + c = 0$ et $(d') : a'x + b'y + c' = 0$ sont strictement parallèles (donc distinctes), si et seulement si on a : $c \neq c'$

Exemples :

$$(d_1) : 3x - 4y + 5 = 0 \quad (d_2) : -6x + 8y - 10 = 0 \quad (d_3) : 9x - 12y + 18 = 0$$

(d_1) et (d_2) sont confondues

(d_1) et (d_3) sont strictement parallèles (ce sont deux droites distinctes)